TÜREV ALMA

A. TÜREV KAVRAMI

1. Türev ile Hız Arasındaki İlişki

Bir hareketlinin t saatte kaç km yol aldığı,

$s(t) = t^2 + 50.t$ fonksiyonu ile verilsin.

Hareketlinin $[t_1, t_2]$ zaman aralığındaki ortalama hızı,

$V_{ort} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ile hesaplanır. Örneğin; hareketlinin

$[2,4]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{(4^2 + 50.4) - (2^2 + 50.2)}{2} = 56$$

km/s olur.

Hareketlinin $[3,4]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{(4^2 + 50.4) - (3^2 + 50.3)}{1} = 57$$

km/s olur.

Hareketlinin $[3.9,4]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(4) - s(3,9)}{4 - 3,9}$$

$$= \frac{(4^2 + 50.4) - (3,9^2 + 50.3,9)}{0,1} = 57,9$$ km/s olur.

Hareketlinin $[4,6]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(6) - s(4)}{6 - 4} = \frac{(6^2 + 50.6) - (4^2 + 50.4)}{2} = 60$$

km/s olur.

Hareketlinin $[4,5]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = \frac{(5^2 + 50.5) - (4^2 + 50.4)}{1} = 59$$

km/s olur.

Hareketlinin $[4,4.1]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{s(4,1) - s(4)}{4 - 3}$$

$$= \frac{(4,1^2 + 50.4,1) - (4^2 + 50.4)}{0,1} = 58,1$$

km/s olur.

Elde ettiğimiz bu sonuçları bir tablo ile gösterelim.

$[t_1, t_2]$	[2,4]	[3,4]	[3.9,4]	[4,4.1]	[4,5]	[4,6]
V_{ort}	56	57	57,9	58,1	59	60

Hareketli 4 saatte radara girmiş olsun. O andaki hızını yani 4. saatteki hızını (anlık hızını) $h \in R^+$ olmak üzere, $h \to 0$ için $[4, 4+h]$ veya $[4-h, 4]$ aralığında ortalama hızdan yola çıkılarak anlık hız bulunur.

$$\text{Anlık hız} = \lim_{h \to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{(4+h) - 4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 + 50.(4+h) - (4^2 + 50.4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 58.h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 58) = 58$$ olur.

$$\text{Anlık hız} = \lim_{h \to 0} \frac{s(4) - s(4-h)}{4 - (4-h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4^2 + 50.4) - [(4-h)^2 + 50.(4-h)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 58.h}{h} = \lim_{h \to 0} (-h + 58) = 58$$

olur.

Ancak hızın genel adı türevdir. Diğer bir ifadeyle, bir fonksiyonun bir noktadaki değişme hızı, fonksiyonun o noktadaki türevidir.

$[4,4+h]$ için hesaplanan anlık hız, sağdan türev;

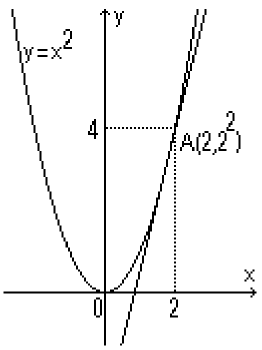
$[4-h,4]$ için hesaplanan anlık hız, soldan türev olarak adlandırılır.

Uyarı

Anlık hız için, sağdan türevin soldan türeve eşit oluşuna dikkat ediniz.

2. Türev ile Teğetin Eğimi Arasındaki İlişki

$f(x)=x^2$ parabolüne $A(2,2^2)$ noktasında çizilen teğetin eğimini araştıralım:



Düzlemde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi:

$m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ile hesaplanır.

Örneğin; $y=x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın $B_1(1,1^2)$ noktası için,

$$m_{AB_1}=\frac{y\text{ deki degisim}}{x\text{ deki degisim}}=\frac{1^2-2^2}{1-2}=3 \text{ bulunur.}$$

$y=x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın $B_2(1.9,1.9^2)$ noktası için,

$$m_{AB_2}=\frac{y\text{ deki degisim}}{x\text{ deki degisim}}=\frac{2^2-1{,}9^2}{2-1{,}9}=3{,}9 \text{ bulunur.}$$

$y=x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın $C_1(3,3^2)$ noktası için,

$$m_{AC_1}=\frac{y\text{ deki degisim}}{x\text{ deki degisim}}=\frac{3^2-2^2}{3-2}=5 \text{ bulunur.}$$

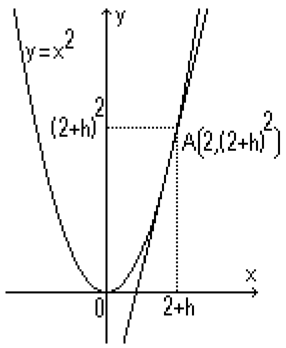
$y=x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın $C_2(2.1,2.1^2)$ noktası için,

$$m_{AC_2}=\frac{y\text{ deki degisim}}{x\text{ deki degisim}}=\frac{2{,}1^2-2^2}{2{,}1-2}=4{,}1 \text{ bulunur.}$$

Elde ettiğimiz sonuçları bir tabloyla gösterelim:

Nokta	$(1,1^2)$	$(1.9,1.9^2)$	$(2.1,2.1^2)$	$(3,3^2)$
Eğim	3	3.9	4.1	5

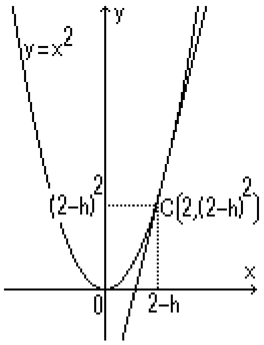
$f(x)=x^2$ parabolüne $A(2,2^2)$ noktasında çizilen teğetin eğimini $h\in R^+$ olmak üzere, $h\to 0$ için A ve $C\left(2+h,(2+h)^2\right)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım:



$$\lim_{h\to 0} m_{AB}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-2}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=4$$

Bu değer $f(x)=x^2$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki sağdan türevidir.

$C\left(2-h,(2-h)^2\right)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.



$$\lim_{h \to 0} m_{AB} = \lim_{h \to 0} \frac{(2-h)^2 - 2^2}{(2-h)-2} = \lim_{h \to 0} \frac{-4h+h^2}{-h} = 4$$

Bu değer $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki soldan türevidir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimidir.

Buna göre $f(x) = x^2$ parabolüne $A(2,2^2)$ noktasında çizilen teğetin eğimi 4 tür.

Uyarı

Teğetin eğimi için, sağdan türevin soldan türeve eşit oluşuna dikkat ediniz.

3. Türevin Tanımı (1)

a, b birer reel sayı olmak üzere, $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x_o \in (a,b)$ için,

$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ limiti bir reel sayı ise, bu limit değerine

f fonksiyonunun x_o noktasındaki türevi denir ve $f'(x_o)$,

$Df(x_o)$ veya $\frac{df}{dx}(x_o)$ ile gösterilir.

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \text{ dır.}$$

$x - x_o = h$ alınırsa $x \to x_o$ için $h \to 0$ olur. Bu durumda, tanım olarak,

$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ ifadesi alınabilir.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2).(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm:

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 4^3}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4).(x^2 + 4x + 16)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} (x^2 + 4x + 16) = 4^2 + 4.4 + 16 = 48 \text{ olur.}$$

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = t$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2t + h) = 2t + 0 = 2t$$

4. Türevin Tanımı (2)

$A \subset R$ ve $a \in A$ olsun. $f : A \to R$ fonksiyonu için,

$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan türevi denir ve

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde,

$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan türevi denir ve

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ biçiminde gösterilir.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan türevi soldan türevine eşit ise f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi vardır. (Bulunan bu limit değerleri, o noktadaki türeve eşittir.) Aksi halde türevi yoktur.

Sonuç

1. $f'(a^+) = f'(a^-)$ ise f fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi vardır.

2. f fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi varsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

3. f fonksiyonu $x = a$ sürekli olduğu halde, o noktada türevi olmayabilir.

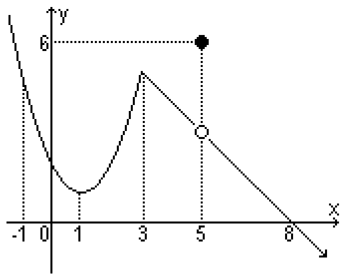
4. f fonksiyonu $x = a$ sürekli değilse türevli de değildir.

Örnek:

$$f : R \to R \ , \ f(x) = \begin{cases} -x + 8, & x \geq 3 \text{ ve } x \neq 5 \\ 6, & x = 5 \\ (x-1)^2 + 1, & x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonunun x' in -1 , 1 , 3 , 5 ve 8 değerlerinin kaçında türevli olduğunu bulalım.

Çözüm:



$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{[(x-1)^2 + 1] - [((-1) - 1)^2 + 1]}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-3).(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x - 3) = -1 - 3 = -4$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{[(x-1)^2 + 1] - [(1-1)^2 + 1]}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Fonksiyonun belirttiği eğriye $x = 1$ noktasında çizilen teğetin eğiminin 0 (sıfır) olduğunu bulduk. ($x = 1$ noktasında çizilen teğet Ox eksenine paraleldir; yani eğimi sıfırdır.)

$x = -1$ ve $x = 1$ noktalarındaki türevleri sağdan türev, soldan türev yaklaşımı ile hesaplasaydık aynı sonuç çıkardı.

Eğrimize $x = 3$ noktasında birden fazla teğet çizilebilir. Bu durumda, bu noktadaki türev nasıl hesaplanacaktır?

Verilen grafikte de görülmekte olduğu üzere, $f(x)$ fonksiyonu, $x = 3$ noktasının sağında $y = -x + 8$; $x = 3$ noktasının solunda $y = (x-1)^2 + 1$ fonksiyonuyla tanımlanmıştır. Buna göre,

$$f'(3^-) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{[(x-1)^2 + 1] - [(3-1)^2 + 1]}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3).(x+1)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} (x+1) = 3 + 1 = 4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(-x+8) - (-3+8)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{-x+3}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} (+1) = 1$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+)$ olduğu için $x = 3$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

Fonksiyonun $x = 3$ noktasında sürekli olduğu halde türevinin olmadığına dikkat ediniz.

$f(x)$ fonksiyonu $x = 5$ noktasında sürekli olmadığından bu noktada türevi yoktur.

$x = 5$ noktasında sağdan türev de soldan türev de -1 dir. Sağdan türevin soldan türeve eşit olması, bu noktada türevin olması için yeterli değildir.

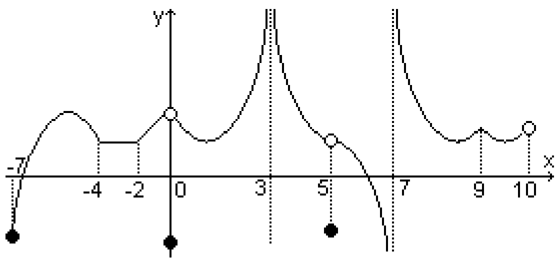
$$f'(8) = \lim_{x \to 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8}$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(-x+8) - (-8+8)}{x - 8} = \lim_{x \to 8} (-1) = -1$$

$x \geq 3$ için $f(x) = -x + 8$ fonksiyonu bir yarı doğru belirtir. Doğrunun üzerindeki herhangi bir noktadan çizilecek teğet, doğru ile çakışıktır. Bunun için teğetin eğimi doğrunun eğimine eşittir. Nitekim, $f(x) = -x + 8$ doğrusunun eğimi de -1 dir.

Buna göre, verilen noktalardan -1 , 1 ve 8 de fonksiyonun türevi vardır.

Örnek:



$[-7,10)$ aralığında tanımlı f fonksiyonu, yukarıda verilen grafik ile tanımlanıyor.
Buna göre x in -7 , -4 , -2 , 0, 3 , 5 , 7 , 9 ve 10 değerlerinin kaçında f fonksiyonunun türevi vardır?

Çözüm:

Bir aralıkta tanımlı fonksiyonun uç noktalarda türevi olmaz. Çünkü bu noktalarda birden fazla teğet söz konusudur.

Buna göre, $x = -7$ de ve $x = 10$ da türev yoktur.

$x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ noktalarında fonksiyon süreksizdir. Süreksizlik noktalarında türev olamayacağı için, bu noktalarda türev yoktur.

$x = -4$, $x = -2$, $x = 9$ noktalarında sağdan türev, soldan türevden farklı olacağı için, bu noktalarda da (süreklilik olmasına rağmen) türev yoktur.

Buna göre, verilen noktalardan hiç birinde fonksiyonun türevi yoktur.

Örnek:

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$ fonksiyonunun türevinin olmadığı noktaları bulalım.

Çözüm:

Bir fonksiyon paydasını sıfır yapan değerlerde tanımsızdır. Tanımsız olunan noktalarda süreksiz olup türev olamayacağı için, bu noktalarda türev yoktur. Buna göre,

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x.(x-1).(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ veya $x = -1$ değerleri için

$f(x)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

Sonuç

Bir fonksiyonun, bir noktada türevinin olması için gerek koşul, o noktada sürekliliktir. Ancak bu, o noktada türevinin olması için yeterli değildir.

Yorum

Konunun buraya kadar olan kısmında; türev kavramını, türevin tanımını, bir noktada türevin olmasının veya olmamasının hangi koşullara bağlı olduğunu, bir noktada türevin anlamını ortaya koymaya çalıştık.

Bütün bunları gerçekleştirebilmek için, fiziğin ortalama hız ve anlık hız; analitik geometrinin teğet ve eğim kavramlarını kullandık.

Anlık hızın genel adının türev olduğunu, diğer bir ifade ile bir fonksiyonun bir noktadaki değişme hızının fonksiyonun o noktadaki türevi olduğunu gösterdik.

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimine eşit olduğunu gösterdik.

Değişimin limitini kullanarak, türevin tanımını aşağıdaki gibi ifade ettik.
a, b birer reel sayı olmak üzere, $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x_o \in (a,b)$ için,

$\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ limiti bir reel sayı ise, bu limit değerine f fonksiyonunun x_o noktasındaki türevi denir ve $f'(x_o)$, $Df(x_o)$ veya $\frac{df}{dx}(x_o)$ ile gösterilir. Buna göre,

$f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ dır.

$x - x_o = h$ alınırsa $x \to x_o$ için $h \to 0$ olur. Bu durumda, tanım olarak,

$f'(x_o) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ ifadesi alınabilir.

Son olarak, bir fonksiyonun, bir noktada türevinin olması için gerek koşulun, o noktada süreklilik olduğu ancak bunun yeter koşul olmadığını gösterdik.

B. TÜREV ALMA KURALLARI

1. x^n nin Türevi

Kural

$n \in R$ olmak üzere, $f(x) = x^n$ ise $f'(x) = n.x^{n-1}$ dir.

Örnek:

$f(x) = x^{10}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = x^{10} \Rightarrow f'(x) = (x^{10})' = 10.x^{10-1} = 10.x^9$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = (x^2)' = 2.x^{2-1} = 2x$ olur.

Örnek:

$f(x) = x$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = (x^1)' = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^{-2}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = (x^{-2})' = -2.x^{-2-1} = -2x^{-3}$ tür

Örnek:

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (x^{-1})' = -1.x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$

olur.

Örnek:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)'$$

$$= \frac{2}{3}.x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}.x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3.\sqrt[3]{x}} \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt{x}} \text{ olur.}$$

2. Sabit Sayının Türevi

Kural

$c \in R$ sabit sayı olmak üzere $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ dır.

Yani sabit sayının türevi sıfırdır.

Örnek:

$f(x) = 10$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = 10 \Rightarrow f'(x) = (10)' \Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

Örnek:

$f(x) = 10^{2007}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = 10^{2007} \Rightarrow f'(x) = \left(10^{2007}\right)' \Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

Örnek:

$f(x) = -\pi$ fonksiyonunun türevini alalım:

$-\pi \in R$ bir reel sayı olduğundan sabit sayıdır. Buna göre,

$f(x) = -\pi \Rightarrow f'(x) = (-\pi)' \Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

Örnek:

$f(x) = \frac{2007}{2008}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = \frac{2007}{2008} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2007}{2008}\right)' \Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

3. Sabit Sayı ile Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Kural

$c \in R$ sabit sayı olmak üzere, $[c.f(x)]' = c.f'(x)$ tir.

Örnek:

$f(x) = 10.x^2$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = 10.x^2 \Rightarrow f'(x) = 10.(x^2)'$

$\Rightarrow f'(x) = 10.(2.x^{2-1}) = 10.(2x) = 20x$ olur.

Örnek:

$f(x) = 10.x$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = 10.x \Rightarrow f'(x) = 10.(x)' = 10.(1.x^{1-1}) = 10.1 = 10$ dur.

Örnek:

$f(x) = 10.g(x)$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = 10.g(x) \Rightarrow f'(x) = (10.g(x))' = 10.g'(x)$ olur.

Örnek:

$f(x) = \frac{g(x)}{10}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f(x) = \frac{g(x)}{10} \Rightarrow f'(x) = (\frac{1}{10}.g(x))' = \frac{1}{10}.g'(x) = \frac{g'(x)}{10}$ olur.

4. İki Fonksiyonun Toplamının Türevi

Kural

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ tir.

Yani iki fonksiyonun toplamının türevi fonksiyonların türevleri toplamına eşittir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + e$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f'(x) = \left(x^2 + e\right)' = \left(x^2\right)' + \left(e\right)' = 2x + 0 = 2x \quad (e \in R)$

Örnek:

$f(x) = \frac{x^5 + 12x^2}{2}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f'(x) = \left(\frac{x^5 + 12x^2}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}.x^5\right)' + \left(\frac{12}{2}.x^2\right)'$

$= \frac{1}{2}.\left(x^5\right)' + \frac{12}{2}.\left(x^2\right)' = \frac{1}{2}.\left(5.x^{5-1}\right) + \frac{12}{2}.\left(2.x^{2-1}\right)$

$= \frac{5}{2}.x^4 + \frac{24}{2}.x = \frac{5x^4 + 24x}{2}$ olur.

5. İki Fonksiyonun Farkının Türevi

Kural

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$ tir.

Yani iki fonksiyonun farkının türevi fonksiyonların türevleri farkına eşittir.

Örnek:

$f(x) = x^5 - 4x^3$ fonksiyonunun türevini alalım:

$f'(x) = \left(x^5 - 4x^3\right)' = \left(x^5\right)' - \left(4x^3\right)'$

$= 5.x^{5-1} - 4.\left(x^3\right)' = 5x^4 - 4.\left(3.x^{3-1}\right)$

$= 5x^4 - 12x^2$ olur.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 4x - 4$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f'(x) = \left(x^2 + 4x - 4\right)' = \left(x^2\right)' + 4.\left(x\right)' - \left(4\right)'$$

$$= 2x + 4.1 - 0 = 2x + 4$$

Örnek:

$\frac{d}{dx}\left(x^{100} - 100x + 100^9\right)$ işleminin yapalım:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{100} - 100x + 100^9\right) = \left(x^{100} - 100x + 100^9\right)'$$

$$= \left(x^{100}\right)' - \left(100x\right)' + \left(100^9\right)'$$

$$= 100.x^{100-1} - 100.x^{1-1} + 0$$

$$= 100x^{99} - 100 \text{ olur.}$$

6. İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Kural

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ tir.

İki fonksiyonun çarpımının türevi; birinci fonksiyonun türevi ile ikincinin çarpımına, birinci fonksiyon ile ikincinin türevinin çarpımı eklenerek bulunur.

Örnek:

$f(x) = \left(x^3 + 1\right)\left(x^2 - 8x + 2\right)$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f'(x) = \left(x^3 + 1\right)'.\left(x^2 - 8x + 2\right) + \left(x^3 + 1\right)\left(x^2 - 8x + 2\right)'$$

$$= \left(3x^2 + 1\right)\left(x^2 - 8x + 2\right) + \left(x^3 + 1\right)\left(2x - 8\right)$$

$$= 5x^4 - 32x^3 + 6x^2 + 2x - 8 \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(1 - x^3\right)$ olduğuna göre $f'(-)$ değerini bulalım:

$$f'(x) = \left(x^2 - 1\right)'.\left(1 - x^3\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(1 - x^3\right)'$$

$$= 2x.\left(1 - x^3\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(-3x^2\right)$$

$$f'(-1) = 2.(-1).\left(1 - (-1)^3\right) + \left((-1)^2 - 1\right)\left(-3(-1)^2\right) = -4 \text{ tür.}$$

7. İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

Kural

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ fonksiyonunun türevini alalım:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\left(x^2 - x\right)'.\left(x + 1\right) - \left(x^2 - x\right).\left(x + 1\right)'}{\left(x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x - 1\right).\left(x + 1\right) - \left(x^2 - x\right).1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} \text{ olur}$$

Örnek:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2 - 1}{x - 2}\right)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2 - 1}{x - 2}\right) = \frac{\left(2x^2 - 1\right)'.\left(x - 2\right) - \left(2x^2 - 1\right)\left(x - 2\right)'}{\left(x - 2\right)^2}$$

$$= \frac{4x.(x-2) - (2x^2 - 1)1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x^2 - 8x + 1}{x^2 - 4x + 4} \text{ olur.}$$

8. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

Kural

$f(x) = |g(x)|$ olsun.

x_o değeri, $g(x) = 0$ denkleminin tek katlı kökü değilse,

$$f'(x_o) = g'(x_o).\mathrm{Sgn}\left[g(x_o)\right] \text{ dır.}$$

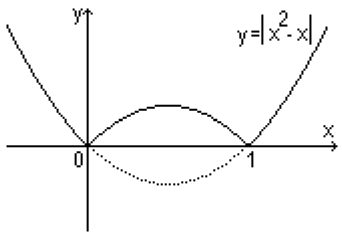
x_o değeri, $g(x) = 0$ denkleminin tek katlı kökü ise,

$$f'(x_o) \text{ yoktur.}$$

Örnek:

$f(x) = |x^2 - x|$ fonksiyonunun x in -1 , 0 , $\frac{1}{2}$, 1, ve 2 değerlerinin kaçında türevi vardır?

Çözüm:



Bu fonksiyonun türevlerini, öncelikle yukarıdaki kuralı uygulamadan sonuçlandıralım. Mutlak değerli ifade, parçalı fonksiyona dönüştürülüp, sonuçlandırılabilir.

$x < 0$ veya $x > 1$ ise,

$f(x) = |x^2 - x| = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$ dir.

$f'(-1) = 2.(-1) - 1 = -3$ tür.

$f'(2) = 2.2 - 1 = 3$ tür.

$0 < x < 1$ ise,

$f(x) = |x^2 - x| = -x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -2x + 1$ dir.

$f'(\frac{1}{2}) = -2.\frac{1}{2} + 1 = 0$ dır.

x		0		1	
$x^2 - x$	+	0	−	0	+
$f(x) = \lvert x^2 - x \rvert$	$x^2 - x$	0	$-x^2 + x$	0	$x^2 - x$
$f'(x)$	$2x - 1$		$-2x + 1$		$2x - 1$

$x = 0$ ve $x = 1$ değerlerinde sağdan türev soldan türevden farklı olduğundan bu noktalarda türev yoktur.

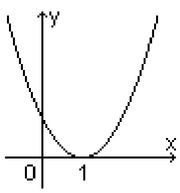
$x = 0$ ve $x = 1$ değerlerindeki türevleri yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x = 0$ ve $x = 1$ değerleri $x^2 - x = 0$ denkleminin tek katlı kökleridirler. Bunun için bu noktalarda türev yoktur.

Örnek:

$f(x) = |x^2 - 2x + 1|$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm:



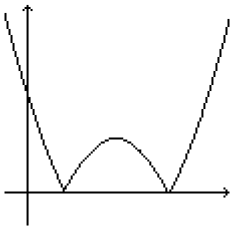
Mutlak değer fonksiyonu negatif sayıların işaretini değiştirir. Fakat pozitif sayılarda hiçbir değişiklik yapmaz. Buna göre,

$f(x) = |x^2 - 2x + 1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ dir.

$f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ dir.

$f'(1) = 2.1 - 2 = 0$ olur.

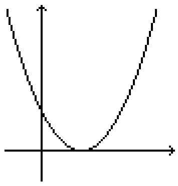
Sonuç



Mutlak değer fonksiyonu tek katlı köklerde köşe (uç) oluşturur. Köşe (uç) noktalarda türev yoktur.

$x = 1$ değeri $x^2 - x = 0$ denkleminin tek katlı köküdür.

Bunun için $f(x) = \left|x^2 - x\right|$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi yoktur.



Halbuki çift katlı köklerde köşe (uç) oluşmaz. Bunun için, çift katlı köklerde türev vardır ve sıfırdır.

$x = 1$ değeri $x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çift katlı köküdür. Bunun için $f(x) = \left|x^2 - 2x + 1\right|$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi vardır..

9. İşaret Fonksiyonunun Türevi

Kural

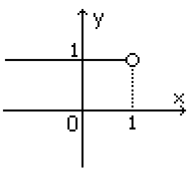
$$f(x) = \text{sgn}[g(x)] \text{ ise } f'(x_o) = \begin{cases} 0\,, & g(x_o) \neq 0 \\ \text{Yoktur}\,, & g(x_o) = 0 \end{cases}$$

Örnek:

$f(x) = \text{sgn}\left(x^2 - 5x + 4\right)$ olduğuna göre $f'(-2)$ kaçtır?

Çözüm:

1.Yol



$x = -2$ deki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x = -2$ yi kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $x < 1$ için oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.
Grafikten de görüleceği gibi, bir sabit sayının (y = 1) türevi sorulmaktadır.

Bütün sabit sayıların türevi sıfır olacağı için $f'(-2) = 0$ dır.

2.Yol

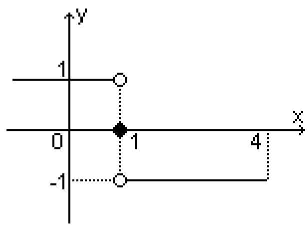
$x = -2$ deki türevi yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x = -2$ değeri $x^2 - 5x + 4 = 0$ denkleminin kökü değildir. Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi vardır; ve sıfırdır.

Örnek:

$f(x) = \text{sgn}\left(x^2 - 5x + 4\right)$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:



$x = 1$ deki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x = 1$ i kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $x < 4$ için oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.
Grafikten de görüleceği gibi, fonksiyon $x = 1$ de sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan süreksizdir. Süreksizlik noktasında türev olamayacağından fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevi yoktur.

2.Yol

$x = 1$ deki türevi verilen kurala göre bulalım:

$x = 1$ için $x^2 - 5x + 4 = 0$ denkleminin sağlanmaktadır.

Yani $x = 1$ değeri $x^2 - 5x + 4 = 0$ denkleminin köküdür. Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Sonuç

Mutlak değer fonksiyonu, işaret fonksiyonu ve tam değer fonksiyonu ile ilgili ifadelerin türevi, kurallar yardımıyla sonuçlandırılabilir. Ancak, bu fonksiyonlar parçalı fonksiyona dönüştürülerek de sonuca gidilebilir.

Örnek:

$f(x) = \text{sgn}\left(x^2 - 5x + 4\right)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona dönüştürerek türevini araştıralım.

Çözüm:

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = 4$ tür.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<1 \text{ veya } x>4\\ 0, & x=1 \text{ veya } x=4\\ -1, & 1<x<4\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ veya } x>4\\ \text{Yoktur}, & x=1 \text{ veya } x=4\\ 0, & 1<x<4\end{cases}$$

10. Tam Değer Fonksiyonunun Türevi

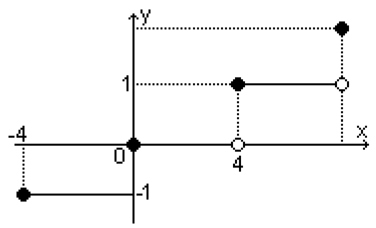
Kural

$$f(x)=\|g(x)\| \text{ ise } f'(x_o)=\begin{cases}0, & g(x_o)\notin Z\\ \text{Yoktur}, & g(x_o)\in Z\end{cases}$$

Örnek:

$f:[-4,8]\to R$, $f(x)=\left\|\frac{x}{4}\right\|$ olduğuna göre $f'(-2)$ kaçtır?

Çözüm:



$x=-2$ deki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x=-2$ yi kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $x<0$ için oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.
Grafikten de görüleceği gibi, bir sabit sayının (y = -1) türevi sorulmaktadır.

Bütün sabit sayıların türevi sıfır olacağı için $f'(-2)=0$ dır.

2.Yol

$x=-2$ deki türevi yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x=-2$ değeri $\left\|\frac{x}{4}\right\|$ ifadesinin içini tam sayı yapmaz.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi vardır; ve sıfırdır.

Örnek:

$f:[-4,8]\to R$, $f(x)=\left\|\frac{x}{4}\right\|$ olduğuna göre $f'(4)$ kaçtır?

Çözüm:

Fonksiyonun grafiğini bir önceki örnekte vermiştik.

$x=4$ teki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x=4$ yi kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $0<x<8$ için oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.
Grafikten de görüleceği gibi fonksiyon bu aralıkta sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan süreksizdir.

Süreksizlik noktasında türevi olmayacağı için $f'(4)$ yoktur.

2.Yol

$x=4$ teki türevi yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x=4$ değeri $\left\|\frac{x}{4}\right\|$ ifadesinin içini tam sayı yapar.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Örnek:

$f:[-4,8]\to R$, $f(x)=\left\|\frac{x}{4}\right\|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyona dönüştürerek türevini araştıralım.

Çözüm:

$$-4\le x<0 \Rightarrow -1\le \frac{x}{4}<0 \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\|=-1 \Rightarrow f(x)=-1 \text{ dir.}$$

$$0\le x<4 \Rightarrow 0\le \frac{x}{4}<1 \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\|=0 \Rightarrow f(x)=0 \text{ dır.}$$

$$4\le x<8 \Rightarrow 1\le \frac{x}{4}<2 \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\|=1 \Rightarrow f(x)=1 \text{ dir.}$$

$$x=8 \Rightarrow \left\|\frac{x}{4}\right\|=\left\|\frac{8}{2}\right\|=\|2\|=2 \Rightarrow f(x)=2 \text{ dir.}$$

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -4\le x<0\\ 0, & 0\le x<4\\ 1, & 4\le x<8\\ 2, & x=8\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}0, & -4<x<0\\ 0, & 0<x<4\\ 0, & 4<x<8\\ \text{Yoktur}, & x=-4,\ x=0,\ x=4,\ x=8\end{cases}$$ olur.

Örnek:

$f(x)=\left\|\dfrac{3x+1}{7}\right\|$ olduğuna göre $f'(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$x=3$ değeri $\left\|\dfrac{3x+1}{7}\right\|$ ifadesinin içini tam sayı yapmaz.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi vardır; ve sıfırdır.

11. Bileşke Fonksiyonunun Türevi

Kural

$$\left[(gof)(x)\right]'=\left(g[f(x)]\right)'=g'\left[f(x)\right].f'(x)$$

Örnek:

$f(x)=\left(6x^2-2x-10\right)^3$ olduğuna göre $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$g(x)=6x^2-2x-10$ olsun.

$f(x)=\left(6x^2-2x-10\right)^3 \Rightarrow f(x)=\left[g(x)\right]^3$

$\left(g[f(x)]\right)'=g'\left[f(x)\right].f'(x)$ olduğuna göre,

$f(x)=\left[g(x)\right]^3 \Rightarrow \left[f(x)\right]'=3.\left[g(x)\right]^2.f'(x)$

$\Rightarrow f'(x)=3.(6x^2-2x-10^2).(12x-2)$

$\Rightarrow f'(2)=3.(6.2^2-2.2-10^2).(12.2-2)$

$\Rightarrow f'(2)=6600$ olur.

Sonuç

$f'(2)$ gösterimi $\left[f(2)\right]'$ gösterimi ile karıştırılmamalıdır.

$f'(2)\neq\left[f(2)\right]'$ dir. Çünkü $f'(2)$ gösterimi, fonksiyonun türevinin, yani $f'(x)$ in $x=2$ için değeridir.

$\left[f(2)\right]'$ gösterimi, fonksiyonun $x=2$ için değerinin (yani, bir reel sayının) türevidir.

Örnek:

$f(x)=\left(x^2-5x\right)^2+x^2-5x-5$ olduğuna göre $f'(5)$ kaçtır?

Çözüm:

$g(x)=x^2-5x$ olsun. $g'(x)=2x-5$ olur.

$f(x)=\left[g(x)\right]^2+g(x)-5$ olur.

$\left[f(x)\right]'=\left\{\left[g(x)\right]^2+g(x)-5\right\}'$

$f'(x)=\left\{\left[g(x)\right]^2\right\}'+\left[g(x)\right]'-(5)'$

$f'(x)=2.\left[g(x)\right].\left[g(x)\right]'+g'(x)-0$

$f'(x)=2.\left(x^2-5x\right)\left(2x-5\right)+2x-5$

$f'(5)=2.\left(5^2-5.5\right)\left(2.5-5\right)+2.5-5=5$ olur.

Sonuç

$f(x) = [u(x)]^n$ ise $\dfrac{df}{dx} = n.[u(x)]^{n-1}.u'(x)$ olur.

Örnek:

$h(x) = f(x^2 - 3x)$ olduğuna göre $h'(5)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$h'(x) = \left[f\left(x^2 - 3x\right)\right]' = f'(x^2 - 3x).(x^2 - 3x)'$$

$$= f'(x^2 - 3x).(2x - 3)$$

$h'(5) = f'(5^2 - 3.5).(2.5 - 3) = 7.f'(10)$ olur.

Örnek:

$g(x) = \dfrac{x-1}{f(x^2)}$ olduğuna göre $g'(1)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$g'(x) = \frac{(x-1)'.f(x^2) - f'(x^2).(x^2)'.(x-1)}{f^2(x^2)}$$

$$= \frac{1.f(x^2) - f'(x^2).2x'.(x-1)}{f^2(x^2)}$$

$g'(1) = \dfrac{f(1^2) - f'(1^2).2.1'.(1-1)}{f^2(1^2)} = \dfrac{f(1)}{f^2(1)} = \dfrac{1}{f(1)}$ olur.

12. Köklü Fonksiyonunun Türevi

Kural

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = \sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}$ ise

$$y' = \left[\sqrt[n]{u^m}\right]' = \left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}.u^{\frac{m}{n}-1}.u' = \frac{m.u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-m}}} \text{ dir.}$$

Örnek:

$y = \sqrt[3]{(x^2 - 5x)^2}$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = x^2 - 5x$ olsun. $u' = 2x - 5$ olur.

$$y' = \left(\sqrt[3]{u^2}\right) = \left(u^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}.u^{\frac{2}{3}-1}.u' = \frac{2.u'}{3.\sqrt[3]{u^{3-2}}}$$

$y' = \dfrac{2.(2x-5)}{3.\sqrt[3]{x^2 - 5x}}$ olur.

Sonuç

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ ise

$y' = \left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}.u^{\frac{1}{2}-1}.u' = \dfrac{u'}{2.\sqrt{u}}$ olur.

Örnek:

$y = \sqrt{4x^2 - x}$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = 4x^2 - x$ olsun. $u' = 8x - 1$ olur.

$y' = \dfrac{u'}{2.\sqrt{u^2}} = \dfrac{8x-1}{2.\sqrt{4x^2 - x}}$ olur.

13. Logaritma Fonksiyonunun Türevi

Kural

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = \log_a u$ ise $y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$ olur.

Örnek:

$y = \log_3\left(x^2 + 5x\right)$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = x^2 + 5x$ olsun. $u' = 2x + 5$ olur.

$$y' = \left(\log_3 u\right)' = \frac{u'}{u}.\log_3 e = \frac{2x+5}{x^2+5x}.\log_3 e \text{ olur.}$$

Sonuç

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = \ln u$ ise $y' = \dfrac{u'}{u}\ln e = \dfrac{u'}{u}$ olur.

Örnek:

$f(x) = \ln\left(x^2 - x + 10\right)$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = \left[\ln\left(x^2 - x + 10\right)\right]' = \frac{\left(x^2 - x + 10\right)'}{x^2 - x + 10} = \frac{2x-1}{x^2 - x + 10}$$

$$f'(1) = \frac{2.1-1}{1^2 - 1 + 10} = \frac{1}{10} \text{ olur.}$$

14. Üstel Fonksiyonunun Türevi

Kural

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = a^u$ ise $y' = u'.a^u.\ln a$ olur.

Örnek:

$y = 5^{x^3 - 2x^2}$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = x^3 - 2x^2$ olsun. $u' = 3x^2 - 4x$ olur.

$$y = 5^u \Rightarrow y' = u'.5^u.\ln u$$

$$= (3x^2 - 4x).5^{x^3 - 2x^2}.\ln 5$$

Sonuç

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = e^u$ ise $y' = u'.e^u$ olur.

Örnek:

$y = e^{2x-1}$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = 2x - 1$ olsun. $u' = 2$ olur.

$$y = e^u \Rightarrow y' = u'.e^u = 2.e^{2x-1} \text{ olur.}$$

15. Parametrik Olarak Verilen Fonksiyonların Türevi

$f : A \to R$ fonksiyonu , $y = f(x)$ şeklinde belirtileceği gibi, g ve h iki fonksiyon olmak üzere

$y = g(t)$

$x = h(t)$

denklemleri ile de belirtilebilir. Burada t ye parametre denir.

Bazen $y = g(t)$ ve $x = h(t)$ denklemlerinden t yok edilerek $y = f(x)$ şeklinde bir denklem elde edilebilir. Ancak bu her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda,

$y = g(t)$ ve $x = h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki kural yardımıyla bulunur.

Kural

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)} \text{ olur.}$$

Örnek:

$y=8t+3$ ve $x=2t+5$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{d}{dt}\{x\}=\frac{d}{dt}\{2t+5\}=2$$

$$\frac{d}{dt}\{y\}=\frac{d}{dt}\{8t+3\}=8$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{8}{4}=2 \text{ olur.}$$

2.Yol

$x=2t+5$ denkleminden t çekilip $y=8t+3$ denkleminde yerine yazılırsa, y 'nin x 'e bağlı değerini elde ederiz.

$x=2t+5$ ise $t=\frac{x-5}{2}$ dir.

$y=8t+3=8.\frac{x-5}{2}+3=4x-17$ olur.

$\frac{dy}{dx}=(4x-17)'=4$ bulunur.

Örnek:

$y=t^3-8t+5$ ve $x=t^2+8t+1$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t=2$ için değerini bulalım.

Çözüm:

Bundan önceki örnekte t 'yi kolayca yok etmiştik. Oysa, bu örnekte, bu kolay değildir. Bunun için, doğrudan kuralı uygulayacağız.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-8}{2t+8} \text{ dir.}$$

Buna göre $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t=2$ için değeri,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=\frac{3.2^2-8}{2.2+8}=\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

16. Ardışık Türevler

$y=f(x)$ fonksiyonunun türevi $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$ olmak üzere $f'(x)$ in türevi olan $y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesine $y=f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi denir.

Benzer şekilde, $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ ifadesine $y=f(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi denir.

Örnek:

$f(x)=x^3+x^2+x+1$ olduğuna göre $f^{(3)}(x)$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1$$

$$f'(x)=3x^2+2x+1$$

$$f''(x)=6x+2$$

$$f'''(x)=6 \Rightarrow f^{(3)}(x)=6 \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x)=x^{10}$ ise $f^{(10)}(x)$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm:

$f(x)=x^{10} \Rightarrow f^{'}(x)=10.x^{9} \Rightarrow f^{''}(x)=10.9.x^{8}$

$\Rightarrow f^{(3)}(x)=10.9.8.x^{7} \Rightarrow f^{(4)}(x)=10.9.8.7.x^{6}$
$\ldots$

$\Rightarrow f^{(9)}(x)=10.9.8.7...2.x^{1} \Rightarrow f^{(10)}(x)=10.9.8...2.1.x^{0}$

$f^{(10)}(x)=10!.1.=10!$ olur.

Örnek:

$\frac{d^3}{dx^3}\left\{x.e^x+x^2\right\}$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm:

$\frac{d}{dx}\left\{x.e^x+x^2\right\}=e^x+x.e^x+2x$

$\frac{d^2}{dx^2}\left\{x.e^x+x^2\right\}=\frac{d}{dx}\left\{e^x+x.e^x+2x\right\}$

$=e^x+e^x+x.e^x+2=2.e^x+x.e^x$

$\frac{d^3}{dx^3}\left\{x.e^x+x^2\right\}=\frac{d}{dx}\left\{2.e^x+x.e^x\right\}=2.e^x+e^x+x.e^x$

$\frac{d^3}{dx^3}\left\{x.e^x+x^2\right\}=3.e^x+x.e^x=e^x.(x+3)$ olur.

17. Kapalı Fonksiyonların Türevi

$F(x,y)=0$ şeklindeki fonksiyonlara kapalı fonksiyon denir.

x in değişken, x in dışında kalanların sabit gibi düşünülmesiyle alınan türevi F_x ile ve y nin değişken, y nin dışında kalanların sabit gibi düşünülmesiyle alınan türevi F_y ile gösterelim.

Buna göre, kapalı fonksiyonun türevini şu kural yardımıyla buluruz.

Kural

$F^{'}(x,y)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ dir.

Örnek:

$F(x,y)=3x^2y^5+2x^3y+x^3+y^2+1=0$ olduğuna göre F_x i ve F_y yi hesaplayalım.

Çözüm:

$\frac{d}{dx}\left\{F(x,y)\right\}=\frac{d}{dx}\left\{3x^2y^5+2x^3y+x^3+y^2+1\right\}$

$\frac{dF(x,y)}{dx}=2.3x^1y^5+3.2x^2y+3.x^2+0+0$

$F_x=6xy^5+6x^2y+3.x^2$ olur.

$\frac{d}{dy}\left\{F(x,y)\right\}=\frac{d}{dy}\left\{3x^2y^5+2x^3y+x^3+y^2+1\right\}$

$\frac{dF(x,y)}{dy}=5.3x^2y^4+1.2x^3y^0+0+2y^1+0$

$F_y=15x^2y^4+2x^3+2y$ olur.

Örnek:

$F(x,y)=x^2y^{10}+x^5+y^{21}+1=0$ olduğuna göre F_x i ve F_y yi hesaplayalım.

Çözüm:

$\frac{d}{dx}\left\{F(x,y)\right\}=\frac{d}{dx}\left\{x^2y^{10}+x^5+y^{21}+1\right\}$

$\frac{dF(x,y)}{dx}=2.x^1y^{10}+5x^4+0+0 \Rightarrow F_x=2xy^{10}+5x^4$

olur.

$$\frac{d}{dy}\{F(x,y)\} = \frac{d}{dx}\{x^2y^{10} + x^5 + y^{21} + 1\}$$

$$\frac{dF(x,y)}{dy} = 10.x^2y^9 + 0 + 21.y^{20} + 0$$

$F_y = 10x^2y^9 + 21y^{20}$ olur.

Örnek:

$F(x,y) = x^2 - y^2 + 1 = 0$ olduğuna göre $F'(x,y)$ yi hesaplayalım.

Çözüm:

$x^2 - y^2 + 1 = 0$ denkleminin her iki tarafının x e göre türevini alarak sonuca gidelim.

$F(x,y) = 0$ denkleminde x e göre türev alınırken, x in bağımsız değişken, y nin ise x e bağımlı değişken (yani fonksiyon) anlamı taşıyacağına dikkat edilmelidir.

$$\frac{d}{dx}\{x^2 - y^2 + 1\} = \frac{d}{dx}\{0\}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^2\} - \frac{d}{dx}\{y^2\} + \frac{d}{dx}\{1\} = 0$$

$$2x - 2y.\frac{d}{dx}\{y\} + 0 = 0 \Rightarrow -2y.\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y} \Rightarrow F'(x,y) = \frac{x}{y} \text{ olur.}$$

2.Yol

Şimdi kural yardımıyla istenen türevi hesaplayalım:

$F_x = 2x - 0 + 0 = 2x$ olur.

$F_y = 0 - 2y + 0 = -2y$ olur.

$$F'(x,y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$F(x,y) = 3x^2y + 2xy^3 + 3 = 0$ olduğuna göre $F'(x,y)$ yi hesaplayalım.

Çözüm:

$3x^2y + 2xy^3 + 3 = 0$ denkleminin her iki tarafının x e göre türevini alarak sonuca gidelim.

$$\frac{d}{dx}\{3x^2y + 2xy^3 + 3\} = \frac{d}{dx}\{0\}$$

$$\frac{d}{dx}\{3x^2y\} + \frac{d}{dx}\{2xy^3\} + \frac{d}{dx}\{3\} = 0$$

$\frac{dy}{dx} = y'$ olmak üzere,

$$\left(6xy + y'.3x^2\right) + \left(2y^3 + 6xy^2.y'\right) + 0 = 0$$

$$y'.\left(3x^2 + 6xy^2\right) = -6xy - 2y^3$$

$$y' = \frac{-6xy - 2y^3}{3x^2 + 6xy^2} \Rightarrow F'(x,y) = -\frac{6xy + 2y^3}{3x^2 + 6xy^2} \text{ olur.}$$

2.Yol

Şimdi kural yardımıyla istenen türevi hesaplayalım:

$F_x = 6xy + 2y^3$ olur.

$F_y = 3x^2 + 6xy^2$ olur.

$$F'(x,y) = -\frac{6xy + 2y^3}{3x^2 + 6xy^2} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$F(x,y) = x^3y + x^2y^4 + x^5 + y^3 - 5 = 0$ olduğuna göre $F'(x,y)$ yi hesaplayalım.

Çözüm:

$F_x = 3x^2y + 2xy^4 + 5x^4$ olur.

$F_y = x^3 + 4x^2y^3 + 3y^2$ olur.

$F'(x, y) = -\dfrac{3x^2y + 2xy^4 + 5x^4}{x^3 + 4x^2y^3 + 3y^2}$ bulunur.

18. Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Kural

$u = f(x)$ olmak üzere $(\sin u)' = u'.\cos u$ dur.

Örnek:

$y = \sin(2x - 60)$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$2x - 60 = u$ olsun. $u' = \dfrac{d}{dx}\{2x\} - \dfrac{d}{dx}\{60\} = 2$ olur.

$y = \sin u \Rightarrow y' = u'.\cos u = 2.\cos(2x - 60)$ olur.

Örnek:

$\dfrac{d}{dx}[x.\sin x + x]$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}[x.\sin x + x] = \frac{d}{dx}(x.\sin x) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.\sin x + x.1.\cos x + 1$$

$$= x.\cos x + \sin x + 1 \text{ olur.}$$

Kural

$u = f(x)$ olmak üzere $(\cos u)' = -u'.\sin u$ dur.

Örnek:

$y = \cos(4x + \dfrac{\pi}{6})$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$4x + \dfrac{\pi}{6} = u$ olsun. $u' = \dfrac{d}{dx}\{4x\} - \dfrac{d}{dx}\{\dfrac{\pi}{6}\} = 4$ olur.

$y = \cos u \Rightarrow y' = -u'.\sin u = -4.\sin(4x + \dfrac{\pi}{6})$ olur.

Örnek:

$y = \tan[f(x)]$ olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

Çözüm:

$u = f(x)$ olmak üzere, $y = \tan u$ ise,

$$y' = (\tan u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{u'.\cos^2 u + u'.\sin^2 u}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{u'.\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right)}{\cos^2 u} = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.\left(1 + \tan^2 u\right) \text{ dur.}$$

Sonuç

$u = f(x)$ olmak üzere,

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'.\left(1 + \tan^2 u\right)$ olur.

19. Ters Fonksiyonların Türevi

$f : A \rightarrow B$, birebir ve örten bir fonksiyon ise $f(x)$ in tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu bulunur. Sonra türev alınır. Bunun zor olduğu durumlarda ters fonksiyonun türevi şöyle alınır.

$f(x_o) = y_o \Leftrightarrow f^{-1}(y_o) = x_o$ olmak üzere,

$\left(f^{-1}\right)'\left(y_o\right) = \dfrac{1}{f'(x_o)}$ olur.

Örnek:

$f(x) = 4x - 1$ olduğuna göre $\left(f^{-1}\right)'(5)$ i bulalım.

Çözüm:

Fonksiyonun tersini bulup türevini alalım:

$f(x) = 4x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{4}$ tür.

Buna göre,

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{4}$ olur.

2.Yol

Tersini kolayca bulamayacağımız fonksiyonlarla karşılaşabiliriz. Bunu için, şimdi de verilen kuralı uygulayalım:

$y_o = 5$ teki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_o = 5$ koşulunu sağlayan x_o değerini bulmalıyız.

$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = 4.x_o - 1 \Rightarrow 5 = 4.x_o - 1$

$\Rightarrow x_o = \dfrac{3}{2}$ dir.

$\left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{f'\left(\dfrac{3}{2}\right)}$ olacağından,

$f(x) = 4x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4 \Rightarrow f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4$ tür. O halde,

$\left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{f'\left(\dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Örnek:

$x > 2$ olmak üzere $f(x) = (x-2)^2 + 1$ olduğuna göre $\left(f^{-1}\right)'(5)$ i bulalım.

Çözüm:

Fonksiyonun tersini bulup türevini alalım:

$x > 2$ ve $f(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$ dir.

Buradan,

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{x-1}}$ olup,

$\left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{2.\sqrt{5-1}} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

2.Yol

$y_o = 5$ teki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_o = 5$ koşulunu sağlayan x_o değerini bulmalıyız.

$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = \left(x_o - 2\right)^2 + 1 \Rightarrow 5 = \left(x_o - 2\right)^2 + 1$

$\Rightarrow \sqrt{\left(x_o - 2\right)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow \left|x_o - 2\right| = 2 \quad (x > 2)$

$\Rightarrow x_o - 2 = 2 \Rightarrow x_o = 4$

$\left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{f'(4)}$ olacağından,

$f(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2.(x-2) \Rightarrow f'(4) = 4$ tür.

$\left(f^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{f'\left(\dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Uyarı

Verilen iki örnekte, fonksiyonların tersleri kolayca bulunabiliyordu. Şimdi de tersi kolayca bulunamayan iki örneği ele alacağız.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x^3 - x$ olduğuna göre $\left(f^{-1}\right)'(6)$ yı bulalım.

Çözüm:

$y_o = 6$ daki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_o = 6$ koşulunu sağlayan x_o değerini bulmalıyız.

$$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = x_o^3 - x_o \Rightarrow 6 = x_o^3 - x_0$$

$$\Rightarrow x_o = 2 \text{ dir.}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{f'(2)} \text{ olacağından,}$$

$$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(2) = 11 \text{ dir.}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere, $f(x) = \tan x$ olduğuna göre $\left(f^{-1}\right)'(1)$ i bulalım.

Çözüm:

$y_o = 1$ deki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_o = 1$ koşulunu sağlayan x_o değerini bulmalıyız.

$$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = \tan(x_o) \Rightarrow 1 = \tan(x_o)$$

$$\Rightarrow x_o = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \text{ olacağından,}$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \text{ dir.}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Sonuç

Trigonometri konusunda $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1}(x) = \arctan x$ olduğunu vermiştik.

Bu durumda, yukarıdaki örnekte $y = \arctan x$ fonksiyonunun $x = 1$ deki türevinin $\frac{1}{2}$ olduğunu vermiş olduk.

Ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinin bulunmasında şu formüller de kullanılabilir.

1. $y = \arcsin u$ ise $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ dir.
2. $y = \arccos u$ ise $y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ dir.
3. $y = \arctan u$ ise $y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ dir.
4. $y = \operatorname{arc\,cot} u$ ise $y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ dir.

Örnek:

$$y = \arcsin\left(3\sqrt{x}\right) \text{ ise } y' = \frac{3.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\left(3\sqrt{x}\right)^2}} = \frac{3}{2.\sqrt{x-9x^2}} \text{ dir.}$$

Örnek:

$\frac{d}{dx}\left(\arcsin(\cos x)\right)$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin(\cos x)\right)=\frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=-\frac{\sin x}{|\sin x|}=\begin{cases}-1, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x)=\operatorname{arc}\cot\sqrt{x}$ ise $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ ün değerini bulalım.

Çözüm:

$$f(x)=\operatorname{arc}\cot\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{\frac{5}{4}}=-\frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x)=\arctan\left(\sin^2 x\right)$ ise $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ün değerini bulalım.

Çözüm:

$$f'(x)=\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{1+\left(\sin^2 x\right)^2}=\frac{2.\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x}=\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(2.\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\left(1+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}=\frac{-1}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}=-\frac{4}{5} \text{ tir.}$$

20. Diferensiyel Kavramı

$A\subset R$, $f:A\to R$, $y=f(x)$ fonksiyonu A da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. x değerindeki değişimi Δx , buna karşılık gelen y değerindeki değişimi Δy ile gösterelim. x in diferensiyeli, $dx=\Delta x$ olmak üzere, y nin diferensiyeli $dy=f'(x).dx$ tir.

Bir fonksiyonun x noktasındaki türevi ile dx in (x in diferensiyelinin) çarpımı, bu fonksiyonun diferensiyeline eşittir.

Örnekler:

- $y=x^2+3x\Rightarrow dy=\left(x^2+3x\right)'dx=(2x+3)dx$
- $f(x)=\sin^2 x\Rightarrow df(x)=\left(\sin^2 x\right)'dx=\sin 2x\,dx$
- $f(t)=\cos 3tx\Rightarrow df(t)=\left(\cos 3t\right)'dt=-3\sin 3t\,dt$
- $d(\ln x)=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$
- $d(e^{\sin x})=(e^{\sin x})'dx=\cos x.e^{\sin x}dx$
- $d(3)=(3)'dx=0.dx=0$
- $d(\cos\pi)=(\cos\pi)'dx=0.dx=0$
- $d(x-2)=(x-2)'dx=1.dx=dx$

Uyarı

$y=f(x)$ fonksiyonunun diferensiyeli $dy=f'(x).dx$ olduğundan; türev alma kuralları diferensiyel için de geçerlidir.

Örnek:

- $y=e^{2x}.\sin x$ fonksiyonunun diferensiyeli (dy) :

$\frac{dy}{dx}=2.e^{2x}.\sin x+\cos x.e^{2x}$ olduğundan

$dy = e^{2x}.(2.\sin x + \cos x).dx$ dir.

- $y = f(x^2 + 3x)$ fonksiyonunun diferensiyeli (dy) :

$\frac{dy}{dx} = f'(x^2 + 3x).(x^2 + 3x)'$ olduğundan

$dy = f'(x^2 + 3x).(2x + 3)dx$ dir.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$ olduğuna göre

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$ kaçtır?

Çözüm:

Türev tanımına göre,

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = f'(-1)$ dir.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$\Rightarrow f'(-1) = 4.(-1)^3 - 6.(-1)^2 = -10$

2. $f(x) = e^{10x} + x^{10} + 10$ olduğuna göre

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ kaçtır?

Çözüm:

Türev tanımına göre,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ dır. Buna göre,

$f(x) = e^{10x} + x^{10} + 10 \Rightarrow f'(x) = 10.e^{10x} + 10x^9 + 0$

$\Rightarrow f'(0) = 10.e^0 + 10.0^9 = 10$ olur.

3. $f(x) = x^3.\operatorname{sgn} x$ olduğuna göre $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$f'(x) = 3x^2.\operatorname{sgn} x + (\operatorname{sgn} x)'.x^3 = 3x^2.\operatorname{sgn} x + 0.x^3$

$= 3x^2.\operatorname{sgn} x$

$f'(2) = 2.2^2.\operatorname{sgn}(2) = 12.1 = 12$ bulunur.

4. $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$ ve $g(x) = \frac{x^2}{f(x)}$ olduğuna göre,

$g'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$g'(x) = \frac{2x.f(x) - f'(x).x^2}{f^2(x)} \Rightarrow g'(2) = \frac{2.2.f(2) - f'(2).2^2}{f^2(2)}$

$\Rightarrow g'(2) = \frac{4.3 - 4.5}{3^2} = -\frac{8}{9}$ dur.

5. $f(x^3) = x^4 + 4x - 3$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x^3) = x^4 + 4x - 3 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{f(x^3)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{x^4 + 4x - 3\right\}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{x^3\right\}f'(x^3) = 4x^3 + 4$

$\Rightarrow 3x^2.f'(x^3) = 4x^3 + 4$

$\Rightarrow f'(x^3) = \frac{4x^3 + 4}{3x^2}$ olur.

Bu son eşitlikte x yerine 1 yazılarak istenen sonuca ulaşılır.

$f'(1^3) = \frac{4.1^3 + 4}{3.1^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{8}{3}$ bulunur.

6. $f(x) = \left\| \frac{x-1}{5} \right\| . x^4$ olduğuna göre $f'(6)$ kaçtır?

Çözüm:

$x = 6$ için $\frac{x-1}{5} = \frac{6-1}{5} = 1 \in Z$ olduğu için $f'(6)$ yoktur.

7. $y = f(x)$ fonksiyonu, $x = \sin 2t$ ve $y = \cos 2t$ parametrik denklemleri ile veriliyor. Buna göre $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

Çözüm:

Parametrik fonksiyonun türevi bilgisini kullanarak sonuca gidelim:

$$\frac{d}{dt}\{x\} = \frac{d}{dt}\{\sin 2t\} = 2.\cos 2t$$

$$\frac{d}{dt}\{y\} = \frac{d}{dt}\{\cos 2t\} = -2.\sin 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2.\sin 2t}{2.\cos 2t} = -\frac{x}{y} \text{ olur.}$$

2.Yol

Verilen parametrik denklemlerin kareleri alınıp, taraf tarafa toplanırsa, kapalı fonksiyon elde edilir. Böylece kapalı fonksiyonun türevi bilgisini kullanarak sonuca gidebiliriz.

$x = \sin 2t \Rightarrow x^2 = \sin^2 2t$ dir.

$y = \cos 2t \Rightarrow y^2 = \cos^2 2t$ dir.

$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ olur.

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dır.

$$F'(x,y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \text{ bulunur.}$$

8. $f(x) = x^2 + |x-4|$ olduğuna göre $f'(3) + f'(5)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f(x) = x^2 + |x-4| = \begin{cases} x^2 + x - 4, & x \geq 4 \\ x^2 - x + 4, & x < 4 \end{cases} \text{ dir.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 4 \\ 2x - 1, & x < 4 \end{cases} \text{ olur. O halde,}$$

$f'(3) + f'(5) = 2.3 - 1 + 2.5 + 1 = 5 + 11 = 16$ bulunur.

9. $f(x) = x^2 + mx + n$ ve $f(1) = f'(3) = 5$ olduğuna göre $m - n$ farkı kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x^2 + mx + n \Rightarrow f'(x) = 2x + m$

$f'(3) = 5 \Rightarrow 2.3 + m = 5 \Rightarrow m = -1$ olur.

$f(1) = 5 \Rightarrow 1^2 + (-1).1 + n = 5 \Rightarrow n = 5$ tir.

$m - n = -1 - 5 = -6$ bulunur.

10. $f(x) = \arctan(\cos x)$ ve $\sin a = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $f'(a)$ kaçtır?

Çözüm:

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2} \text{ olduğuna göre,}$$

$$f(x) = \arctan(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x} = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \text{ dir.}$$

$\sin a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = \frac{4}{5}$ tir. Buna göre,

$$f'(a) = -\frac{\sin a}{1+\cos^2 a} = \frac{3/5}{1+(4/5)^2} = -\frac{15}{41} \text{ bulunur.}$$

11. $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 13$ olduğuna göre,

$\left(f^{-1}\right)'(14)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = x^3 - 13 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+13}$ tür. Buna göre,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(x+13)^2}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(14) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(14+13)^2}} = \frac{1}{3.3^2} = \frac{1}{27}$$ bulunur.

2.Yol

$y_o = 14$ deki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_o = 14$ koşulunu sağlayan x_o değerini bulmalıyız.

$$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = x_o^3 - 13 \Rightarrow 14 = x_o^3 - 13$$

$$\Rightarrow x_o^3 = 27 \Rightarrow x_o = 3$$ tür.

$\left(f^{-1}\right)'(14) = \dfrac{1}{f'(3)}$ olacağından,

$f(x) = x^3 - 13 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(3) = 3.3^2 = 27$ dir.

O halde,

$\left(f^{-1}\right)'(14) = \dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{1}{27}$ bulunur.

12. $\dfrac{d^2}{dx}\{e^{2x} + x^2\}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

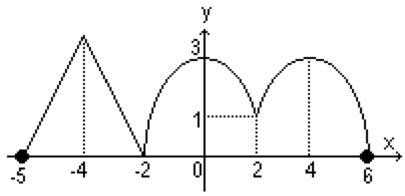
Çözüm:

$$\frac{d^2}{dx}\{e^{2x} + x^2\} = \frac{d^2}{dx^2}\{e^{2x} + x^2\}dx$$

$$= \frac{d}{dx}\{\frac{d}{dx}\{e^{2x} + x^2\}\}dx = \frac{d}{dx}\{2e^{2x} + 2x\}dx$$

$= \{2.2e^{2x} + 2\}dx = 2.\{2e^{2x} + 2\}dx$ olur.

13.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonu $(-5,6)$ aralığında kaç noktada türevsizidir?

Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = -4$ ve $x = 2$ noktalarında sağdan türevi soldan türevinden farklı olduğundan bu iki noktada türevsizdir.

$g(x)$ fonksiyonu, $f(x)$ e bağlı tanımlandığı için, bu iki noktada $g(x)$ fonksiyonu da türevsizdir.

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ şeklinde tanımlandığından $f(x) = 0$ koşulunu sağlayan x değerlerinde $g(x)$ fonksiyonu tanımsız olur.

$x = -2$ de $f(x) = 0$ olduğundan $g(x)$ bu noktada tanımsızdır. Fonksiyon, tanımsız olduğu noktada süreksizdir. Süreksizlik noktasında türev olmayacağı için, bu noktada türev yoktur.

Buna göre $g(x)$ fonksiyonunun 3 noktada türevi yoktur.

14. $F(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2} = 0$ olduğuna göre $F'(x,y)$ ifadesini bulunuz.

Çözüm:

$F(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2} = 0$ olduğuna göre,

$F_x = -\frac{1}{x^2}$ ve $F_y = -\frac{1}{y^2}$ olup

$$F'(x,y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-1/x^2}{-1/y^2} = -\frac{y^2}{x^2} \text{ olur.}$$

15. $f(x) = \ln(\arctan x)$ olduğuna göre $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Türev tanımına göre $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = f'\left(\sqrt{3}\right)$ tür.

$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$ olduğuna göre,

$$f(x) = \ln(\arctan x) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\arctan x)'}{\arctan x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x}$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{3}) = \frac{\frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}{\arctan\left(\sqrt{3}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4\pi} \text{ bulunur.}$$

16. $f(x) = \sqrt{\sin\frac{x-\pi}{4}}$ olduğuna göre, $f'(2\pi)$ kaçtır?

Çözüm:

$\frac{x-\pi}{4} = u$ olsun. $u' = \frac{1}{4}$ olur.

$$f(x) = \sqrt{\sin\frac{x-\pi}{4}} = \sqrt{\sin u} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sin u)'}{2.\sqrt{\sin u}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'.\cos u}{2.\sqrt{\sin u}} = \frac{\frac{1}{4}.\cos\frac{x-\pi}{4}}{2.\sqrt{\sin\frac{x-\pi}{4}}} \text{ olur.}$$

O halde,

$$f'(2\pi) = \frac{\frac{1}{4}.\cos\frac{2\pi-\pi}{4}}{2.\sqrt{\sin\frac{2\pi-\pi}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}.\cos\frac{\pi}{4}}{2.\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{2.\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 2^{-\frac{13}{4}} \text{ tür.}$$

17. $f(x) = \left|(x+1).(x-2)^2\right|$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $f'(5) = 45$ b. $f'(0) = 0$

c. $f'(-2) = -24$ d. $f'(2)$ yoktur.

e. $f'(-1) =$ yoktur.

Çözüm:

x		-1		2	
$(x+1).(x-2)^2$	−	0	+	0	+
f(x)	$-(x+1).(x-2)^2$	0	$(x+1).(x-2)^2$	0	$(x+1).(x-2)^2$
f'(x)	$-3x^2+6x$		$3x^2-6x$		$3x^2-6x$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4, & x > 2 \\ 0, & x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 4, & -1 < x < 2 \\ 0, & x = -1 \\ -x^3 + 3x^2 - 4, & x < -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x, & x > 2 \\ 0, & x = 2 \\ 3x^2 - 6x, & -1 < x < 2 \\ 0, & x = -1 \\ -3x^2 + 6x, & x < -1 \end{cases}$$

Buna göre,

$f'(5) = 3.5^2 - 6.5 = 45$

$f'(3) = 3.3^2 - 6.3 = 9$

$f'(0) = 3.0^2 - 6.0 = 0$

$f'(-2) = 3.(-2)^2 - 6.(-2) = -24$

Mutlak değer fonksiyonu tek katlı köklerde köşe (uç) oluşturur. Köşe(uç) noktalarda türev yoktur. Bunun için

$f'(-1)$ yoktur.

Mutlak değer fonksiyonu çift katlı köklerde köşe (uç) oluşturmaz. Bunun için çift katlı köklerde türev vardır ve sıfırdır.

$f'(2) = 0$ dır. Buna göre, $f'(2)$ yoktur ifadesi yanlıştır.

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2\ , & x \geq 2 \\ mx + n\ , & x < 2 \end{cases}$ fonksiyonu bütün reel sayılar için türevlenebilir olduğuna göre m + n kaçtır?

Çözüm:

$x > 2$ veya $x < 2$ ise $f(x)$ türevlenebilir.

$x = 2$ de türevlenebilir olması için:

$f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ de sürekli ve $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki sağdan türevi, soldan türevine eşit olmalıdır.

$f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ de sürekli olduğuna göre,

$x = 2$ için $x^2 + x + 2$ nin değeri $mx + n$ nin değerine eşit olmalıdır. Buna göre,

$2^2 + 2 + 2 = m.2 + n \Rightarrow 2m + n = 8$ olur.

$x \geq 2$ için, $f'(x) = 2x + 1$ dir.

$f'(2^+) = 2.2 + 1 = 5$

$x < 2$ için, $f'(x) = m$ dir.

$f'(2^-) = m$

$x = 2$ noktasındaki sağdan türevi, soldan türevine eşit olacağına göre

$f'(2^+) = f'(2^-) \Rightarrow 5 = m$ olur.

$2m + n = 8 \Rightarrow 2.5 + n = 8 \Rightarrow n = -2$ olur. O halde,

$m + n = 5 + (-2) = 3$ bulunur.

19. $f(x) = e^{2x}.\sin x$ olduğuna göre $f''(x)$ ifadesini bulunuz.

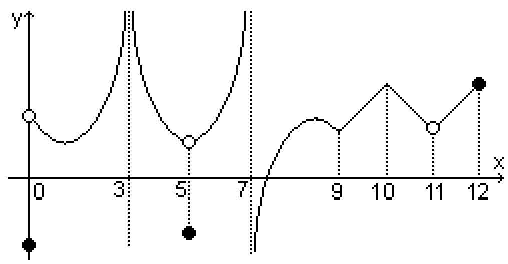
Çözüm:

$f'(x) = 2.e^{2x}.\sin x + \cos x.e^{2x}$

$$f''(x) = 2.2.e^{2x}.\sin x + \cos x.2.e^{2x} - \sin x.e^{2x} + 2.e^{2x}.\cos x$$

$f''(x) = e^{2x}(3.\sin x + 4.\cos x)$ bulunur.

20.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun $[0,12]$ aralığındaki grafiği verilmiştir.

$f(x)$ fonksiyonunun aralığında limitinin olup, türevinin olmadığı kaç nokta vardır?

Çözüm:

Önce, türevinin olmadığı noktaları belirleyelim. Sonra da bu noktalardan limiti olanları saptayalım.

Bir aralıkta tanımlı fonksiyonun uç noktalarda türevi olmaz. Çünkü bu noktalarda birden fazla teğet söz konusudur.

Buna göre $x = 0$ da ve $x = 12$ de türev yoktur.

$x = 3$, $x = 5$, $x = 7$, $x = 11$ noktalarında fonksiyon süreksizdir. Süreksizlik noktalarında türev olmayacağı için, bu noktalarda türev yoktur. $x = 9$ ve $x = 10$ noktalarında sağdan türev, soldan türevden farklı olacağı için, bu noktalarda da (sürekli olmasına rağmen) türev yoktur. Belirtilen noktalar dışında kalan diğer bütün noktalarda türev vardır. Şimdi türevin olmadığı $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$, $x = 9$, $x = 10$, $x = 11$, $x = 12$ noktalarından kaçında limit olduğunu belirleyelim. Bu sekiz noktadan sadece $x = 7$ de (sağdan limit, soldan limitten farklı olduğu için) limit yoktur. Diğer yedi noktada limit vardır. Buna göre, $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 9$, $x = 10$, $x = 11$, $x = 12$ noktalarında limit olduğu halde türev yoktur. **KONU BİTMİŞTİR…**	