

Mutlak Değer Tanımı

$$|x| = \begin{cases} +x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

içini (+) yapıyorsa (+) kendisi

$$x \geq 0 \text{ ise } |x| = +x$$

içini (-) yapıyorsa (-) kendisi

$$x < 0 \text{ ise } |x| = -x$$

Örneğin, $|3| = +3$, $|-3| = -(-3) = +3$

Mutlak Değer Fonksiyonunun Tanımı

$$|f(x)| = \begin{cases} +f(x) & , \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Örnek: $x < 2$ iken $|x-2| = ?$

I.Yol: (Pratik kural) Verilen aralıkta temsili bir değer verilir. İçini içini (+) yapıyorsa (+) kendisi, içini (-) yapıyorsa (-) kendisi olur.

II. Yol: Tanımdan

$$|x-2| = \begin{cases} & , \quad x-2 \geq 0 \\ & , \quad x-2 < 0 \end{cases}$$

III. Yol: Tablodan

Tanımla İlgili Örnekler:

1) $-3 < x < 5$ ise

$$|x+3| + |x-5| =$$

2) $x < -4$ ise

$$|x+4| + |x-2| =$$

3) $x > 3$ ise

$$|x+2| - |x-3| =$$

4) $2 < x < 3$ ise

$$-|x-2| + |x-3| =$$

5) $a < x < b$ ise

$$|a| - |b| + |a-b| =$$

6) $b < x < a$ ise

$$-|a| + |b| - |a-b| =$$

7) $x < 2$ ise

$$|2x - |x-6|| =$$

8) $x < -6$ ise

$$|5x + |3x + |x-12|| =$$

9) $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| =$

10) $|3 - 2\sqrt{3}| + |2\sqrt{3} - 4| =$

Mutlak Değer Özellikleri

$$1. \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$2. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

$$3. \quad |a^n| = |a|^n$$

$$4. \quad |-a| = |a|$$

$$5. \quad |-f(x)| = |f(x)|$$

$$6. \quad \sqrt[2n+1]{f(x)^{2n+1}} = f(x)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)^{2n}} = |f(x)|$$

$$7. \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$8. \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|$$

11) $x < 0$ ise

$$|x| - |-2x| + |-6x| + 7x - |-3x| =$$

12) $x < 0$ ise

$$\sqrt{9x^2} - \sqrt{4x^2} - \sqrt{16x^2} - \sqrt{(-5x)^2} + \sqrt[3]{64x^3} =$$

13) $x > 0$ ise

$$-\sqrt[3]{27x^3} + \sqrt{49x^2} - \sqrt{(-4x)^2} - \sqrt[3]{125x^3} - \sqrt{16x^2} =$$

14) $x < 0$ ise

$$|x - |x - |-x|| =$$

15) $x < 0$ ise

$$|3x + |2x - |-x|| =$$

16) $x < 0 < y$ ise

$$|5x - y - |3x - 2y - |x - |y|| =$$

17) $a < b < 0 < c$ ise

$$c \cdot |a - b| - b \cdot \sqrt{(c - a)^2} + a \cdot |b - c| =$$

18) $a < b < 0 < c$ ve

$$|a - 4| - |c - a| + \sqrt{(b - c)^2} = 8 \text{ ise } b \text{ kaçtır?}$$

19) $x < 0 < y$ ise

$$|3x - |2x - |x - |-y|| = y + 18 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

20) $x > 1$ ve

$$|3x - |1 - 2x|| + \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^3} = 19 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

21) $x, y < 0$ ve $y, z > 0$

$$\frac{5x \cdot y}{|xy|} - \frac{|2xz|}{x \cdot z} - \frac{|4yz|}{y \cdot z} =$$

22) $|x - 2| = x - 2$ ve $|x - 7| = 7 - x$ eşitliklerini sağlayan x tamsayı değerlerinin sayısı kaçtır?23) $\sqrt{24 - 3x} + \sqrt{2x - 6} = y$ eşitliğinde $y \in R$ ise x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?24) $\sqrt{13 - 2x} + \sqrt{2x - 13} + 4x - 7 = y$ eşitliğinde $y \in R$ ise $|2x - y|$ kaçtır?25) $|2x - 3| + |3 - 2x| = 18$ ise x kaçtır?

I. TİP: $|f(x)| = a$, $a \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = a \text{ veya } f(x) = -a$$

1) $|3x - 6| = 18$ ise x kaçtır?

2) $|4 - 2x| + |2x - 4| = 28$ ise x kaçtır?

3) $|4x - 6| + |9 - 6x| = 55$ ise x kaçtır?

4) $|x^3 + x| = 9x^2 + 9$ ise x kaçtır?

5) $y = x - 3$ ise $|3x - 3y| + |5y - 5x| = ?$

6) $|(2x - 6)^7| = 128$ ise x kaçtır?

7) $|x - y + 3| + |x + y - 11| = 0$ ise (x,y)=?

8) $|2x - 3y + 3| + (3x + 3y - 28)^2 = 0$ ise x-y kaçtır?

9) $|2 + |2x - 1|| = 5$ ise x kaçtır?

10) $||x - 3| - 6| = 4$ ise x kaçtır?

11) $|x^2 - 4| = 3|x + 2|$ ise x kaçtır?

12) $|4x^2 - 25| - 7|2x + 5| = 0$ ise x kaçtır?

II. TİP: $|f(x)| = g(x)$ Tek köklü tablo kullanılır.

1) $|x-2| = x+6$ çözüm kümesi nedir?

2) $|x+3| = 7-x$ çözüm kümesi nedir?

3) $|2-x| = 2x-8$ çözüm kümesi nedir?

4) $|2x-4| = x-1$ çözüm kümesi nedir?

5) $-|x+1| = \frac{x}{2} - 4$ çözüm kümesi nedir?

6) $|5x-2| = 3x+10$ çözüm kümesi nedir?

III. TİP: $|f(x)| = |g(x)|$ Tabloya gerek yok

1) $|x-2| = |x+4|$ çözüm kümesi nedir?

2) $|2x-1| = |2x+3|$ çözüm kümesi nedir?

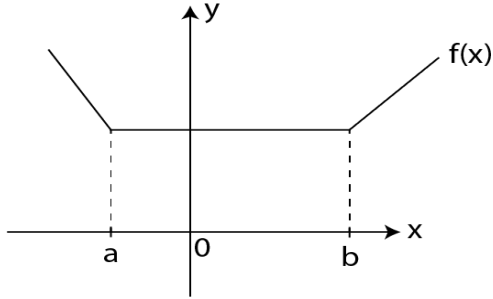
3) $|x+3| = 2|x-3|$ çözüm kümesi nedir?

4) $|2x-1| = |x+7|$ çözüm kümesi nedir?

5) $\left|\frac{x}{2}-3\right| = |x+3|$ çözüm kümesi nedir?

6) $\left|\frac{x}{4}+1\right| = |x-1|$ çözüm kümesi nedir?

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + |x-b|$ fonksiyonunun grafiği $x=a$ ve $x=b$ de kırılma yapan ve minimum değeri $f(a) = f(b) = |a-b|$ olan aşağıdaki grafiktedir.



(Şekil 1)

IV. TİP: A) $|f(x)| + |g(x)| = a$

İki köklü tablo kullanılır.

1) a) $|x-4| + |x+2| = 6$ çözüm kümesi nedir?

b) $|x-4| + |x+2| = 10$ çözüm kümesi nedir?

c) $|x-4| + |x+2| = 4$ çözüm kümesi nedir?

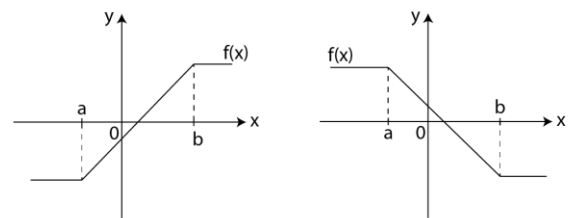
2) $|x+3| + |x-1| = 4$ çözüm kümesi nedir?

3) $|x-5| + |x+3| = 12$ çözüm kümesi nedir?

4) $|x+1| + |3-x| = 2$ çözüm kümesi nedir?

5) $|x+2| + |x-6| = 12$ çözüm kümesi nedir?

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| - |x-b|$ fonksiyonunun grafiği $x=a$ ve $x=b$ de kırılma yapar. Bu noktaların birinde maksimum değer yani $|a-b|$, diğerinde ise minimum değer yani $-|a-b|$ oluşur. Fonksiyonun grafiği aşağıdaki grafiklerden birisi gibidir.



(Şekil 2)

IV. TİP: B) $|f(x)| - |g(x)| = a$

İki köklü tablo kullanılır.

6) a) $|x-2| - |x+6| = 8$ çözüm kümesi nedir?

b) $|x-2| - |x+6| = -8$ çözüm kümesi nedir?

c) $|x-2| - |x+6| = 6$ çözüm kümesi nedir?

7) $|x-3| - |x+7| = -10$ çözüm kümesi nedir?

8) $|x+2| - |x-4| = 2$ çözüm kümesi nedir?

9) $-|x+3| + |x-5| = 8$ çözüm kümesi nedir?

10) $|x+4| - |x-2| = -2$ çözüm kümesi nedir?

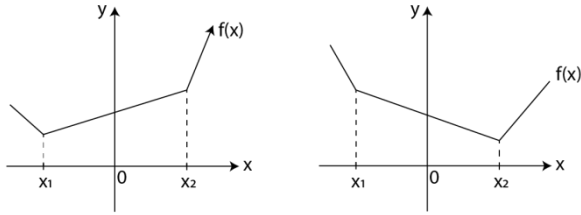
Buradan sonra çözülecek soruların yorumlanabilmesini kolaylaştırmak için bu fonksiyonların grafikleri bize görsel olarak fayda sağlayacak.

İki mutlak değer toplamı biçiminde verilen ifadelerin en küçük değeri bulunurken, yukarıdaki (Şekil 1) den de görüldüğü gibi x in önündeki katsayı 1 olan örneklerde en küçük değeri $f(a)$, $f(b)$ yada $[a, b]$ aralığında herhangi bir x değeri için fonksiyonun aldığı değerdir.

11) $|x+3| + |x-11|$ ifadesinin **en küçük** değeri kaçtır?

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax - b| + |mx - n|$ fonksiyonunun grafiği, mutlak değer içlerini sıfır yapan $\frac{b}{a}$ ve $\frac{n}{m}$ apsisi noktalarda kırılma yapar.

Bu değerlerden küçük olanı x_1 ve büyük olanı x_2 olsun. Fonksiyonun $f(x_1)$ ya da $f(x_2)$ de minimum değeri oluşur.



(Şekil 3)

(Şekil 3) ten görüldüğü gibi soldaki köktemi sağdaki köktemi en küçük değeri alabilir bilemeyeceğimiz için iki kökü de yerine koyarız çıkan sonuçlardan küçük olanı ifadenin en küçük değeridir.

12) $|2x - 7| + |x + 5|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

13) $|3x + 9| + |2x - 4|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Üçlü yada daha fazla mutlak değer toplamı biçiminde verilen ifadelerin en küçük değeri bulunurken ortanca kök ifadesi en küçük yapar.

14) $|x + 3| + |x - 9| + |x - 2|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

15) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

16) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 27|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

17) $\frac{28}{|x + 6| + |x - 1|}$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

18) $\frac{15}{|x - 1| + |2x - 8|}$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

19) $\frac{36}{|x - 2| + |x + 4| + |x - 5|}$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

İki mutlak değer fonksiyonunun farkı biçiminde verilen ifadelerin en büyük yada en küçük değeri yerine hem üst sınırı hem de alt sınırı olduğu için alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır şeklinde sorulur.

20) $x \in \mathbb{R}$ ise $|x+7| - |x-4|$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

21) $x \in \mathbb{R}$ ise $|x-1907| - |2007-x|$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

22) $x \in \mathbb{Z}$ ise $|x+4| - |x-9|$ ifadesinin alabileceği kaç tamsayı değeri vardır?

23) $x \in \mathbb{Z}$ ise $-|x+6| + |x-2|$ ifadesinin alabileceği kaç tamsayı değeri vardır?

V. TİP: Tek köklü tablo kullanılır.

1) $3x + 2|x| = 5$ çözüm kümesi nedir?

2) $5x + |x-2| = 8$ çözüm kümesi nedir?

3) $x^2 + 5|x| - 6 = 0$ çözüm kümesi nedir?

4) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ çözüm kümesi nedir?

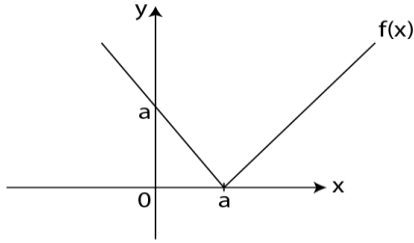
5) $x^2 - 3|x| - 10 = 0$ çözüm kümesi nedir?

6) $x^2 + 9|x| + 20 = 0$ çözüm kümesi nedir?

7) $x^2 - |x - 3| - 9 = 0$ çözüm kümesi nedir?

8) $x^2 - |3x - 6| - 4 = 0$ çözüm kümesi nedir?

YORUM GEREKTİREN KARMA ÖRNEKLER:



$|x - a| = m$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır biçimindeki sorularda m nin kaç olduğunun önemi yoktur.

$$x - a = m \quad \text{veya} \quad x - a = -m$$

$$x = a + m \quad \text{veya} \quad x = a - m$$

olduğundan x değerleri toplamı daima $2a$ dır.

1) $|x - 3| = 19!$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

2) m reel sayı olmak üzere

$|x + 2| = 1923^m$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

3) y reel sayı olmak üzere

$|x - 4| + |12 - 3x| = 4y^2 + 4$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

4) $|x - a| = 7$ denkleminin çözüm kümesi $\{2, -2\}$ olduğuna göre farklı a değerlerinin toplamı kaçtır?

5) $|x - a| = 21!$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı 12 olduğuna göre a kaçtır?

6) $|2x - 5| + |15 - 6x| = \frac{23}{37}$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

7) x tamsayı olmak üzere $-11 \leq x \leq 18$ için

$|x-7|+17$ ifadesinin alabileceği kaç farklı değer vardır?

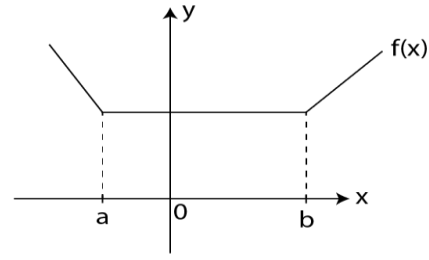
8) x tamsayı olmak üzere $-30 \leq x \leq 90$ için

$|2x-20|+29$ ifadesinin alabileceği kaç farklı değer vardır?

9) $|x-2|+|x+7|$ ifadesinin en küçük olmasını sağlayan kaç farklı x tamsayısı vardır?

10) x tamsayı olmak üzere $-7 \leq x \leq 10$ için

$|x-3|-|x+7|$ ifadesinin alabileceği kaç farklı değer vardır?



$|x-a|+|x-b|=m$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır biçimindeki sorularda

$$x-a+x-b=m \quad \text{veya} \quad -x+a-x+b=m$$

$$2x=a+b+m \quad \text{veya} \quad -2x=-a-b-m$$

$$x=\frac{a+b+m}{2} \quad \text{veya} \quad x=\frac{a+b-m}{2}$$

olduğundan x değerleri toplamı

$$\frac{a+b+m}{2} + \frac{a+b-m}{2} = \frac{2(a+b)}{2} = a+b \quad \text{olur.}$$

11) $|x-7|+|x+1|=A$ olmak üzere $A < 12$ eşitsizliğini sağlayan farklı A tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

12) $x \in \mathbb{Z}$ ve $|x+2|+|x-5|=A$ olmak üzere, $A \leq 15$ eşitsizliğini sağlayan farklı A tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

I. TİP: $|f(x)| \leq a$, $a \in \mathbb{R}^+$ veya $a \geq |f(x)|$
 $-a \leq f(x) \leq a$

I. TİP ÖRNEKLERİ

1) $|x| \leq 1$

2) $|2x-3| < 5$

3) $|7-2x| \leq 11$

4) $\left| \frac{2x-5}{3} \right| < 7$

5) $\sqrt{\left(\frac{3x-6}{5} \right)^2} \leq \frac{6}{5}$

6) $\frac{18}{|2x+3|} \geq 2$

7) $\frac{2}{|3-2x|} > 4$

8) $|x^2-1| \leq 3$

9) $|x^2-2| < 7$

10) $|(2x-3)^2-5| \leq 44$

11) $|x^2-10| < 6$

12) $|2x^2-6| \leq 2$

II. TİP: $|f(x)| \geq a$, $a \in R^+$ veya $a \leq |f(x)|$

$$f(x) \leq -a \quad \text{veya} \quad a \leq f(x)$$

Bu tip örnekler için iki çözüm yolundan birini kullanacağız. I. Yol. Olumsuzunu yazıp çıkan aralığı Reel sayılar kümesinden çıkartacağız. II. Yol ise yukarıda verilen tanım gereği mutlağın içine dokunmadan $-a$ nın sol tarafına a nın sağ tarafına koyacağız. Yani mutlak değerin içi $-a$ dan küçük veya a dan büyük olabilir diyeceğiz.

Bir eşitsizliğin değili:

$\geq$ in değili $<$ tür.

$>$ in değili $\leq$ tir.

1) $|x| > 5$

I. Yol

II. Yol

2) $|2x-3| \geq 7$

3) $|1-2x| > 11$

4) $\left| \frac{3}{x-1} \right| < \frac{1}{2}$

5) $\left| \frac{2x-7}{3} \right| > 5$

6) $|x^2-1| \geq 3$

7) $|102+2x^2| > 200$

8) $|(2x-5)^2-3| \geq 78$

III. TİP $a \leq |f(x)| < b$, $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$a \leq f(x) < b \quad \text{veya} \quad a \leq -f(x) < b$$

1) $5 \leq |2x + 7| < 13$

2) $7 < |9 - 2x| \leq 13$

3) $6 \leq |2 - 3x| < 15$

eşitsizliğini sağlayan kaç x tamsayı değeri vardır?

4) $-4 \leq |4x - 2| < 10$

eşitsizliğini sağlayan kaç x tamsayı değeri vardır?

5) $|3x - 6| > 15$ ve $|2x - 5| > -3$

eşitsizlik sistemini sağlayan farklı x tamsayı değerleri toplamı kaçtır?

Verilen bir aralıktan mutlak değerli eşitsizliklerinin elde edilmesi ile ilgili örnekler:

I. Tipin Tersten örneği:

1) $-2 < x < 8$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

2) $-7 < x < 1$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

3) $-11 \leq x \leq 4$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

II. Tipin Tersten örneği:

1) $x < -6$ veya $2 < x$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

2) $x \leq -1$ veya $9 \leq x$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

3) $x \leq -8$ veya $3 \leq x$

aralığını sağlayan x değerlerini mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

İki tane mutlak değerli eşitsizliklerin çözümü bulunurken eşitsizliğin iki tarafının da karesi alınır.

1) $|x - 2| < |x - 9|$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x doğal sayı değeri vardır?

2) $|2x - 3| < |2x + 5|$ ve $|2x^2 - 1| < 31$

eşitsizlik sistemini sağlayan kaç tane x tam sayı değeri vardır?

1) $|x-2|+2 < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2) $|2x-1|-9 < 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3) $|x^3+x| \leq 3x^2+3$ eşitsizliğinin Ç.K.?

4) $|x-2|+x-2=0$ eşitsizliğinin Ç.K.?

5) $|x+3|-x-3=0$ ve $|x+9|+x+9=0$ eşitsizlik sistemini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

6) $x < \frac{3}{2}$ ise $|x-3|-x+2x=?$

7) $|(3x-7)^5| \leq 32$ eşitsizliğinin Ç.K.?

8) $|2x-3|+|3-2x| \leq 14$ eşitsizliğinin Ç.K.?

9) $|x-4| < |x-2|$ ise $\frac{9-x^2}{|x-3|}=?$

10) $(x+y-2)^2+|x-y+6|=0$ ise $x^2-y^2=?$

11) $2 < x < 3$ ise

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = ?$$

12) $-3 < x < 1$ ise

$$-\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = ?$$

13) x bir gerçel sayı $|x| < 4$ ise $(3x-1)$ in en büyük ve en küçük tamsayı değeri kaçtır?

14) x, y gerçel sayılar

$$\begin{aligned} |2x-1| &\leq 7 \\ |3-y| &< 15 \end{aligned} \quad \text{ise} \quad (2x-3y+2) \text{ in } \underline{\text{en büyük}} \text{ ve } \underline{\text{en küçük}} \text{ tamsayı değeri kaçtır?}$$

15) $|x-3| \cdot |3-x| = 16$ eşitsizliğinin Ç.K.?

16) $\frac{12}{|x-2|+|x+1|+1}$ ifadesinin en büyük tamsayı değeri kaçtır?

17) $|4-x|+|x-3|+|x+5|$ ifadesinin en küçük tamsayı değeri kaçtır?

18) $1 \leq x \leq 2$ ise $\frac{|x-1|+|x-2|+x}{|x-3|-4} = ?$

19) $|x-6|+|x+3|$ ifadesini en küçük olmasını sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

20) $|2x-4|+|12-2x|=32$ denklemini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

21) $|3x+3|+|5x+5|\leq 24$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

22) $y \in R$ olmak üzere

$|x-5|+|10-2x|=3y^2+3$ denklemini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

23) $|x-a|=13!$ denklemini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı 14 ise a kaçtır?

24) $|5x-15|\leq 25$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

25) $4<|x-3|\leq 6$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

26) $-100\leq x\leq 100$ ve $|7x-21|>42$ eşitsizlik sistemini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

27) a bir tamsayı $||x-a|+2|\leq 5$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı 56 olduğuna göre a kaçtır?

28) $3\leq|x-4|\leq k+1$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı 64 olması için k değeri kaç olmalıdır?

29) $|x+11|+|x-5|=A$ olmak üzere $A<20$ eşitsizliğini sağlayan farklı A tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

30) $|x+1|+|x-5|\leq 14$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?