

Tanım: a ve b birer reel sayı ve $i^2 = -1$ veya

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = a + bi$ biçiminde tanımlı z

Sayısına karmaşık (komplex) sayı denir. Karmaşık sayılardan oluşan kümeye de karmaşık sayılar kümesi denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \{Z / Z = a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } i = \sqrt{-1}\} \text{ dir.}$$

$Z = a + bi$ sayısında a' ya Z' nin reel kısmı, b' ye Z nin sanal (imajinel) kısmı denir.

$\text{Re}(Z)=a$ ve $\text{Im}(Z)=b$ şeklinde gösterilir.

UYARI 1: $Z = a + bi$ sayısında $b=0$ ise $Z = a \in \mathbb{R}$ dir.

Bundan dolayı her reel sayı sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır. Bu nedenle $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ dir.

Örnek 1)

Aşağıdaki karmaşık sayıların reel ve sanal kısımlarını belirtilen yerlere yazınız.

Re

İm

a) $Z=3-4i$

b) $Z=-2+3i$

c) $Z=-4-5i$

d) $Z=7i-9$

e) $Z=8i$

f) $Z=-5$

g) $Z=-i$

h) $Z=\sqrt{2}i-\sqrt{5}$

i) $Z=0$

Örnek 2)

$x^2 + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Örnek 3)

$x^2 + 2x + 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Örnek 4)

$x^2 - 4x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

İ SAYISININ KUVVETLERİ:

$$i^0 =$$

$$i^{4n} =$$

$$i^1 =$$

$$i^{4n+1} =$$

$$i^2 =$$

$$i^{4n+2} =$$

$$i^3 =$$

$$i^{4n+3} =$$

$$i^4 =$$

$$i^{4n+4} =$$

Örnek 5)

Aşağıdaki i nin kuvveti olarak yazılmış sayıların kuvvetsiz olarak eşitlerini yazınız.

$$i^{37} =$$

$$i^{41} =$$

$$i^{298} =$$

$$i^{356} =$$

$$i^{1024} =$$

$$i^{503} =$$

$$i^{972} =$$

$$i^{1040} =$$

$$i^{646} =$$

$$i^{1337} =$$

$$i^{255} =$$

$$i^{2269} =$$

UYARI 2: i^n değeri hesaplanırken n yerine n nin mod4'e göre dengi olan sayılarda yazılabileceğinden n yerine mod 4 e göre eşiti olan sayı yazılabilir.

$$n \equiv k \pmod{4} \Rightarrow i^n = i^k \text{ dir.}$$

Yani n yerine n nin 4 e bölümünden kalan yazılabilir. Özellikle n' nin negatif tam sayı olduğu sorularda bu çözüm kullanılır. Sayıya istenildiği kadar 4' ün katı ilave edilir.

Örnek 6)

Aşağıdaki i nin kuvveti olarak yazılmış sayıların kuvvetsiz olarak eşitlerini yazınız.

- a) $i^{-1} =$
- b) $i^{-22} =$
- c) $i^{-96} =$
- d) $i^{-2007} =$

Çözüm:

- a) $-1 \equiv \pmod{4}$
- b) $-22 \equiv \pmod{4}$
- c) $-96 \equiv \pmod{4}$
- d) $-2007 \equiv \pmod{4}$

Örnek 7)

$$\frac{9-i^{254}}{3+i^{122}} = ?$$

Örnek 8)

$$\frac{1}{i^{1907}} + \frac{1}{i^{1996}} = ?$$

İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ

İki karmaşık sayı birbirine eşitse reel ve sanal kısımları karşılıklı olarak eşittir.

$$Z_1 = a + bi \text{ ve } Z_2 = x + yi \text{ verilsin}$$

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(Z_1) = \operatorname{Re}(Z_2) \text{ yani } a=x \\ \operatorname{Im}(Z_1) = \operatorname{Im}(Z_2) \text{ yani } b=y \end{cases} \text{ dir.}$$

Örnek 9)

$$\begin{aligned} Z_1 &= 3x - 4 + 4i \\ Z_2 &= 2 + (y + 5i) \end{aligned} \quad Z_1 = Z_2 \text{ ise } x+y \text{ kaçtır?}$$

Örnek 10)

$$\begin{aligned} Z_1 &= 3x - 7 \\ Z_2 &= 12i - 4yi + 2 \end{aligned} \quad z_1 = z_2 \text{ ise } x+y \text{ kaçtır?}$$

Örnek 11)

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2x - 3 + i \\ Z_2 &= 2yi - 4i \end{aligned} \quad z_1 = z_2 \text{ ise } x+y \text{ kaçtır?}$$

BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ

Bir karmaşık sayının eşleniği bulunurken sadece imajinel kısmı işareti değiştirilir. Z karmaşık sayısının eşleniği $\bar{Z}$ ile gösterilir.

$$Z = a + bi \text{ ise } \bar{Z} = a - bi \text{ dir.}$$

Örnek 12)

Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $Z_1 = 3 - 4i$ ise $\bar{Z}_1 =$

b) $Z_2 = 2i - 5$ ise $\bar{Z}_2 =$

c) $Z_3 = 4$ ise $\bar{Z}_3 =$

a) $Z_4 = -3i$ ise $\bar{Z}_4 =$

EŞLENİKLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

1) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

2) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$

3) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

4) $\overline{(\bar{Z})} = Z$

5) $\overline{(Z^n)} = (\bar{Z})^n$

KARMAŞIK SAYILARDA DÖRT İŞLEM

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ verilmiş olsun;

1) TOPLAMA:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Reel kısım reel kısımla sanal kısım sanal kısımla toplanır.

2) ÇIKARMA:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= Z_1 + (-Z_2) = (a + bi) - (c + di) \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Z_1 aynen yazılır Z_2 eksi ile çarpılır ve yine reel kısım reel kısımla sanal kısım sanal kısımla toplanır.

Örnek 13)

Aşağıda verilen karmaşık sayıların toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucunu bulunuz.

a) $Z_1 = 3 - 4i$ ve $Z_2 = 4 + 2i$ ise

$$Z_1 + Z_2 =$$

b) $Z_1 = -2 + 3i$ ve $Z_2 = 6 - 2i$ ise

$$Z_1 - Z_2 =$$

c) $Z_1 = \sqrt{3} - 2i$ ve $Z_2 = -2\sqrt{3} + i$ ise

$$Z_1 + Z_2 =$$

d) $Z_1 = 5\sqrt{3}i - 4$ ve $Z_2 = \sqrt{3}i + 2$ ise

$$Z_1 - Z_2 =$$

e) $\sqrt{-16} + 4 - \sqrt{-25} + \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = ?$

f) $\sqrt{-144} + \sqrt{64} - \sqrt{-64} - \sqrt{49} = ?$

g) $\sqrt{-81} - \sqrt{-121} + \sqrt{36} - \sqrt{169} = ?$

h) $\sqrt{-225} - \sqrt{36} - \sqrt{-9} - \sqrt{289} = ?$

i) $\sqrt{-16} - \sqrt{49} - \sqrt{-324} + \sqrt{441} = ?$

3) ÇARPMA:

$$\begin{aligned}
Z_1 \cdot Z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\
&= a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot i^2 \\
&= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i
\end{aligned}$$

Örnek 14)

Aşağıda verilen karmaşık sayıların çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(2 + 3i) \cdot (4 - 2i) = ?$

b) $(5 + 2i) \cdot (3 + 4i) = ?$

c) $(2 - 3i) \cdot (-3 + 2i) = ?$

d) $(-3 + i) \cdot (2 - i) = ?$

e) $(2 + i) \cdot (-1 - i) = ?$

f) $(5 - i) \cdot (-i + 2) = ?$

g) $(5 - 2i) \cdot (-4i + 3) = ?$

i) $(2\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i) = ?$

j) $(\sqrt{3} - \sqrt{3}i) \cdot (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}i) = ?$

k) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{5}i) \cdot (3\sqrt{5} - \sqrt{5}i) = ?$

4) BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ İLE ÇARPIMI:

$$\begin{aligned}
Z \cdot \bar{Z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\
&= (a^2 - b^2 \cdot i^2) = a^2 + b^2
\end{aligned}$$

İki kare farkı formülü kullanılarak birinci terimin karesi eksi ikinci terimin karesi alınır. Burada i^2 yerine -1 yazılırsa ifade $a^2 + b^2$ elde edilir.

Örnek 15)

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşlenikleri ile çarpımları işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = ?$

b) $(5 - 2i) \cdot (5 + 2i) = ?$

c) $(1 + i) \cdot (1 - i) = ?$

d) $(-3 - 5i) \cdot (-3 + 5i) = ?$

e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}i) = ?$

f) $(\sqrt{5} - 3i) \cdot (\sqrt{5} + 3i) = ?$

g) $(2\sqrt{7} + 4i) \cdot (2\sqrt{7} - 4i) = ?$

i) $(5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}i) \cdot (5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i) = ?$

5) BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİNİN NEGATİFİ**İLE ÇARPIMI:**

$$Z \cdot (-\bar{Z}) = (bi + a) \cdot (bi - a) \\ = (b^2 \cdot i^2 - a^2) = -b^2 - a^2$$

Bu kez sanal kısım aynı kalmış reel kısım işaret değiştirmiş buna dikkat ediniz. Aynı şekilde iki kare farkı formülü kullanılarak birinci terimin karesi eksi ikinci terimin karesi alınır. Burada i^2 yerine -1 yazılırsa $-a^2 - b^2$ elde edilir.

Örnek 16)

Aşağıdaki işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(3i + 4) \cdot (3i - 4) = ?$

b) $(5i - 3) \cdot (5i + 3) = ?$

c) $(i + 1) \cdot (i - 1) = ?$

d) $(7i - 4) \cdot (7i + 4) = ?$

e) $(\sqrt{3}i + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}i - \sqrt{2}) = ?$

e) $(3\sqrt{2}i + 2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2}i - 2\sqrt{5}) = ?$

f) $(3\sqrt{5}i - 6) \cdot (3\sqrt{5}i + 6) = ?$

g) $(7\sqrt{2}i + 5) \cdot (7\sqrt{2}i - 5) = ?$

UYARI 3: a ve $b \in \mathbb{R}^+$ ise $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Fakat a ve $b \in \mathbb{R}^-$ ise aynı kök içinde çarpım yapılamaz. Yani $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \neq \sqrt{a \cdot b}$ dir.

Buna göre aşağıdaki işlemleri dikkatlice inceleyiniz.

* $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4 \cdot 25}$

* $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25} = \sqrt{(-4) \cdot (-25)}$

Örnek 17)

Aşağıdaki işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-8} = ?$

b) $\sqrt{-18} \cdot \sqrt{-24} \cdot \sqrt{-3} = ?$

c) $(\sqrt{-2})^3 \cdot \sqrt{-18} + (\sqrt{-3})^2 - (\sqrt{-5})^4 = ?$

d) $(\sqrt{-3})^3 + (\sqrt{-25})^2 - (\sqrt{-3})^5 - (\sqrt{-6})^4 = ?$

UYARI 4: Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri $Z = a + bi$ ise diğer kök bunun eşleniği olan $\bar{Z} = a - bi$ dir.

Örnek 18)

Bir kökü 2-4i olan ikinci dereceden reel katsayılı denklem nedir?

5) BÖLME

Bölme işleminde paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır. Dolayısıyla payda reel sayı olur.

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{a \cdot c - a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i - b \cdot d \cdot i^2}{c^2 - d^2 \cdot i^2} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad) \cdot i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac+bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2 + d^2} \cdot i\end{aligned}$$

Örnek 19)

Aşağıdaki bölme işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $\frac{2+3i}{3-2i}$

b) $\frac{3-4i}{2+i}$

c) $\frac{4-2i}{3-i}$

d) $\frac{5-i}{4-2i}$

e) $\frac{2+3i}{1+2i}$

e) $\frac{3-2i}{1-3i}$

f) $\frac{4+3i}{2-5i}$

g) $\frac{1+i}{1-i}$

i) $\frac{1-i}{i}$

j) $\frac{1+2i}{1-2i}$

k) $\frac{3-4i}{3+4i}$

k) $\frac{5+3i}{5-3i}$

Örnek 20)

Aşağıdaki bölme işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{-2}} - \frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}} = ?$

b) $\frac{\sqrt{-75}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{-2}} - \frac{\sqrt{-76}}{\sqrt{-19}} = ?$

c) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}} - \frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-192}}{\sqrt{-3}} = ?$

d) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{-3}} + \frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{-242}}{\sqrt{-2}} = ?$

KARMAŞIK SAYILARIN KARESİ VE KÜPÜ

Kare alma işleminde tam kare formülü kullanılır. Toplamın karesinde, birinci terimin karesi artı iki terimin çarpımları artı ikinci terimin karesi.

Farkın karesinde, birinci terimin karesi eksi iki terimin çarpımları artı ikinci terimin karesi.

Tam küp işleminde parantez küp açılımı yapmak daha uzun bir işlem olacağı için önce karesini alıp daha sonra birinci kuvveti ile çarpma işlemini kullanacağız.

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2ab.i + b^2.i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(a - bi)^2 = a^2 - 2ab.i + b^2.i^2 = a^2 - b^2 - 2abi$$

$$\begin{aligned}(a + bi)^3 &= (a + bi)^2 \cdot (a + bi) \\ &= (a^2 + 2ab.i + b^2.i^2) \cdot (a + bi) \\ &= (a^2 - b^2 + 2abi) \cdot (a + bi)\end{aligned}$$

Örnek 21)

Aşağıdaki işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(2 - 3i)^2 = ?$

b) $(4 + 2i)^2 = ?$

c) $(5 - 4i)^2 = ?$

d) $(3 + 5i)^2 = ?$

e) $(3 - i)^2 = ?$

f) $(\sqrt{2} - 2i)^2 = ?$

g) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^2 = ?$

h) $(2 - 5\sqrt{3}i)^2 = ?$

i) $(-\sqrt{5} + \sqrt{7}i)^2 = ?$

Örnek 22)

Aşağıdaki işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(2 + i)^3 = ?$

b) $(1 - 2i)^3 = ?$

c) $(2 - 3i)^3 = ?$

d) $(3 + 2i)^3 = ?$

Örnek 23)

Aşağıdaki toplama işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{94} = ?$

b) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{75} = ?$

c) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{34} = ?$

d) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{55} = ?$

BİR KARMAŞIK SAYININ n. KUVVETTEN ÜSSÜNÜN BULUNMASI

Sayının n. kuvvetini almak yerine işlem kolaylığı sağladığı için sayının karesinin n/2 kuvvetini alarak işlem yaparız.

Örnek 24)

Aşağıdaki üs alma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(1+i)^{18}=?$

b) $(1-i)^{100}=?$

c) $(1+i)^{29}=?$

d) $(1-i)^{31}=?$

e) $(2+2i)^{50}=?$

f) $(2-2i)^{39}=?$

g) $(-4-4i)^{17}=?$

Örnek 25)

Aşağıdaki üs alma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)^{13} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^{13}=?$

b) $(2\sqrt{6}+2\sqrt{2}i)^{21} \cdot (2\sqrt{6}-2\sqrt{2}i)^{21}=?$

c) $(1-i)^9 \cdot (i-1)^7=?$

d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{24} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{23}=?$

UYARI 5:

$$1) Z_1 = Z_2 \quad \text{ise} \quad Z_1 \pm W = Z_2 \pm W$$

$$2) Z_1 = Z_2 \quad \text{ise} \quad Z_1 \cdot W = Z_2 \cdot W$$

$$3) Z_1 \cdot W = Z_2 \cdot W \quad \text{ise} \quad Z_1 = Z_2 \quad (W \neq 0)$$

$$4) Z_1 + x = Z_2 \quad \text{ise} \quad x = Z_2 - Z_1$$

$$5) W \cdot x + Z_1 = Z_2 \quad \text{ise} \quad W \cdot x = Z_2 - Z_1$$

$$x = \frac{Z_2 - Z_1}{W}$$

Örnek 26)

$\frac{2+i}{1-i} - 2 \cdot Z = 2 - 3i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı bulunuz.

Örnek 27)

$(Z+1) \cdot (2-i) = 2+i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı bulunuz.

Örnek 28)

$\frac{2Z+i}{3-i} \cdot (2-i) + 3 - 2i = 2 - 2i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı bulunuz.

Örnek 29)

$\overline{Z} + 2 = \overline{Z}(2-i) + 3 + 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı bulunuz.

UYARI 6: Yukarıdaki dört soruda Z karmaşık sayısı UYARI 5 te gösterilen özellikler kullanılarak yalnız bırakılabildi. Fakat buradan sonraki iki soruda sorunun içinde hem Z hemde $\overline{Z}$ olduğu için bu tür sorularda Z yi yalnız bırakamayız. Bu nedenle bu tür soruların çözümünde Z yerine x+yi $\overline{Z}$ yerine x-yi konulur ve karmaşık sayıların eşitliğinden faydalanılarak x ve y bulunur.

Örnek 30)

$Z - 2 = \overline{Z} \cdot (1-i) + 2 + 5i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı bulunuz.

Örnek 31)

$Z - i = \overline{Z} \cdot (1+i) + 3 - 9i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı bulunuz.

UYARI 7: Z karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{Z}$, toplama işlemine göre tersi $-Z$ dir.

Örnek 32)

$2+i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi ile toplama işlemine göre tersinin toplamı z karmaşık sayısı olduğuna göre $[\text{Re}(Z)]^2 + [\text{Im}(Z)]^2$ kaçtır?

Örnek 33)

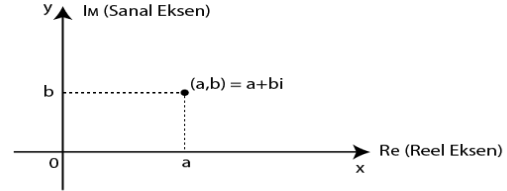
$Z^2 - Z \cdot i + 6i + x = 0$ denkleminin bir kökü $2-i$ olduğuna göre x kaçtır?

Örnek 34)

$Z^3 - 2 \cdot \frac{\bar{Z}}{Z} + xi + 2 = 0$ denkleminin bir kökü $1+i$ olduğuna göre x kaçtır?

KARMAŞIK DÜZLEM

$Z = a + bi$ karmaşık sayısı için $\text{Re}(Z) = a$ sayısı x ekseninde $\text{Im}(Z) = b$ sayısı y ekseninde alarak oluşan (a,b) noktası $a+bi$ karmaşık sayısını gösterir.



Bu şekilde karmaşık sayılarla bire bir eşlenmiş düzleme karmaşık düzlem denir.

Örnek 35)

Aşağıdaki karmaşık sayıları karmaşık düzlemde gösteriniz.

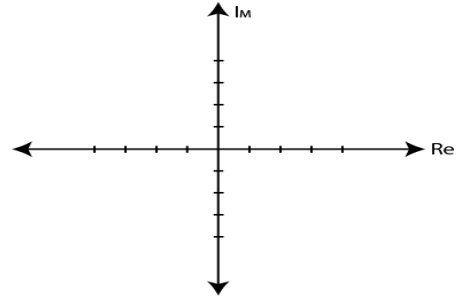
a) $Z_1 = 3+4i$

b) $Z_2 = -2+i$

c) $Z_3 = -3i$

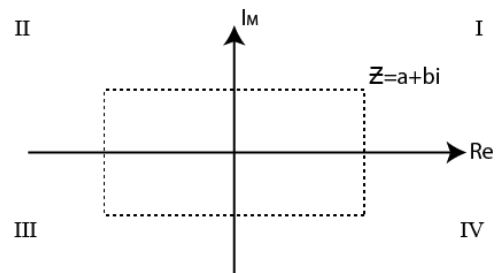
d) $Z_4 = -4$

e) $Z_5 = 2-i$



Örnek 36)

$Z = a + bi$ karmaşık sayısı, karmaşık düzlemde 1. Bölgede ise $\bar{Z}$, $-Z$, $-\bar{Z}$ karmaşık sayıları sırasıyla hangi bölgededirler?



KARMAŞIK SAYILARININ MUTLAK DEĞERLERİ

$Z = a + bi$ karmaşık sayısının O başlangıç noktasına olan uzaklığına karmaşık sayının mutlak değeri (büyüklüğü yada Modülü) denir ve $|Z|$ ile gösterilir.

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Örnek 37)

Aşağıdaki karmaşık sayıların mutlak değerlerini bulunuz.

a) $z_1 = 3 - 4i$, $|z_1| = ?$

b) $z_2 = 12 + 5i$, $|z_2| = ?$

c) $z_3 = \sqrt{11} - \sqrt{5}i$, $|z_3| = ?$

d) $z_4 = -2 + 3i$, $|z_4| = ?$

e) $z_5 = 3 - 3i$, $|z_5| = ?$

f) $z_6 = 2 + 4i$, $|z_6| = ?$

g) $z_7 = 5 + 15i$, $|z_7| = ?$

h) $z_8 = \sqrt{17} - \sqrt{8}i$, $|z_8| = ?$

i) $z_9 = -3i$, $|z_9| = ?$

j) $z_{10} = -4$, $|z_{10}| = ?$

MUTLAK DEĞER(MODÜL) İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

Her Z_1, Z_2 ve $Z \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

1) $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

2) $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

3) $|Z^n| = |Z|^n$

4) $|Z| = |-Z| = |\bar{Z}| = |-\bar{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

5) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

6) $Z = a + bi$ $\bar{Z} = a - bi$ ise
 $Z \cdot \bar{Z} = a^2 + b^2 = |Z|^2$

Örnek 38)

$Z_1 = \sqrt{15} + i$ ve $Z_2 = 7 - 24i$ ise

$Z_1 \cdot Z_2$ sayısının büyüklüğü kaçtır?

Örnek 39)

$$Z = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2 - 2i}$$

Z karmaşık sayısının modülü kaçtır?

Örnek 40)

$$Z = (-4 + 4i)^{10}$$

Z sayısının modülü kaçtır?

Örnek 41)

$$Z = \frac{(1-i)^8 \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{14}i)^6}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}i)^4} \quad \text{ise } |Z| \text{ kaçtır?}$$

Örnek 42)

$$Z = \frac{(-2 + 2i)^6}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}i)^8}$$

Sayısının orijine olan uzaklığı kaç birimdir?

Örnek 43)

Z karmaşık sayısının büyüklüğü 8 br ise

$$\frac{\bar{Z} \cdot \sqrt{|Z|}}{\sqrt[3]{-Z}}$$

Karmaşık sayısının büyüklüğü kaç birimdir?

İPUCU: Aşağıdaki üç sorunun çözümünde Z yerine $x+yi$ ve Z , $\bar{Z}$ veya $-\bar{Z}$ sayılarının modülü yerine de

$\sqrt{x^2 + y^2}$ konularak çözüme gidilir.

Örnek 44)

$|Z| \cdot i - Z = 2 - 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısını bulunuz.

Örnek 45)

$Z \cdot i - |\bar{Z}| = -8 + 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısını bulunuz.

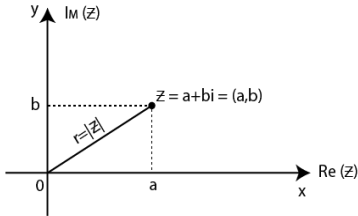
Örnek 46)

$|Z| \cdot i - Z = 2 - 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısını bulunuz.

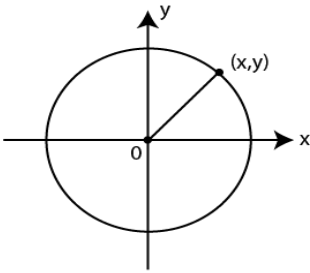
EK BİLGİ

1) İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

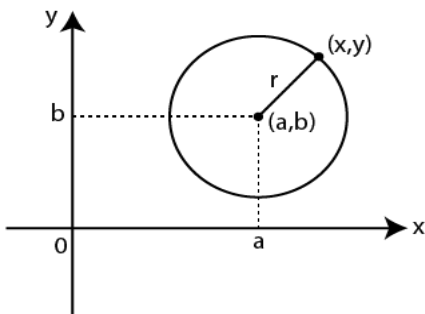
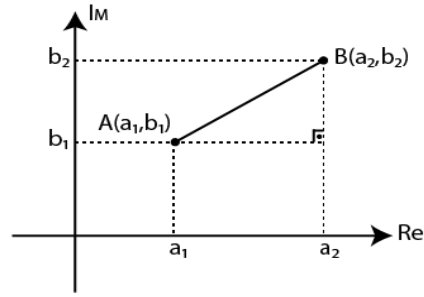
$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ olmak üzere;

**2) MERKEZCİL ÇEMBER DENKLEMİ**

Merkezi orijin olan çembere merkezci çember denir. Merkezi orijin olduğu için $M(0,0)$ ve yarı çapı r olan çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir.

**3) MERKEZCİL KAYDIRILMIŞ ÇEMBER DENKLEMİ**

Merkezi $M(a,b)$ noktasına kaydırılmış yarı çapı r olan çember denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dir.

**İKİ KARMAŞIK SAYI ARASINDAKİ UZAKLIK**

İki karmaşık sayı arasındaki uzaklık, bu sayıların görüntüleri olan noktalar arasındaki uzaklığa eşittir.

$Z_1 = a_1 + b_1i$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i$ sayıları arasındaki uzaklık $|AB| = |Z_2 - Z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ dir.

NOTLAR

1) $|Z - Z_0|$ gösterimi Z sayısının Z_0 sayısına olan uzaklığını belirtir.

2) $|Z - Z_0| = r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi Z_0 sayısına uzaklığı r olan noktaların kümesidir. Bu ise Z_0 merkezli r yarıçaplı çemberdir.

3) $|Z - Z_0| < r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi Z_0 merkezli r yarıçaplı çemberin içidir.

4) $|Z - Z_0| > r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi Z_0 merkezli r yarıçaplı çemberin dışıdır.

Örnek 47)

$$z_1=3-5i \text{ ve } z_2=-2+7i \text{ ise } |Z_2-Z_1|=?$$

Örnek 48)

Karmaşık düzlemde $|Z|=3$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 49)

Karmaşık düzlemde $|Z-3i|=2$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 50)

Karmaşık düzlemde $|Z+3-2i|\leq 3$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 51)

Karmaşık düzlemde $|Z+2|>3$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 52)

$1\leq Z.\bar{Z}<4$ koşulunu sağlayan $Z=x+yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 53)

$1<|Z|\leq 4$ koşulunu sağlayan $Z=x+yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 54)

$1\leq|Z+1-i|\leq 2$ koşulunu sağlayan $Z=x+yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 55)

$|Z| = |Z + 2|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntüsü ne belirtir.

Örnek 56)

$|Z + 1| \leq |Z + 3|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntüsü ne belirtir.

Örnek 57)

$|Z + 1| > |Z - 3|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntüsü ne belirtir.

Örnek 58)

$|\operatorname{Re}(Z)| \leq 4$ ve $|\operatorname{Im}(Z)| \leq 3$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının oluşturduğu bölgenin alanı kaç br^2 dir.

Örnek 59)

$|Z| > |Z - 4i|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntüsü ne belirtir.

Örnek 60)

$|Z - i| \leq |Z + 3i|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntüsü ne belirtir.

Örnek 61)

$|Z + 2| < |Z - 4i|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 62)

$|Z + 1| > |Z - 3i|$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi nedir?

Örnek 63)

$|Z| \leq 4$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayıları için $|Z - 8 + 15i|$ ifadesinin en küçük ve en büyük değeri kaçtır?

Örnek 64)

$|Z + 6 - 8i| \leq 3$ koşulunu sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayılarının başlangıç noktasına uzaklıkları en az ve en çok kaç br dir.

Örnek 65)

$|Z| \leq 5$ olduğuna göre, $|Z - 5 - 12i|$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

Örnek 66)

$|Z + 3 - 4i| = 6$ eşitliğini sağlayan $Z = x + yi$ karmaşık sayıları için $|Z|$ nin en küçük ve en büyük değerlerinin toplamı kaçtır?

Örnek 67)

$|Z - 1| \leq 2$ olduğuna göre, $|Z + 2 - 4i|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?